2023年度　ミクロ経済学中級 Ib 第2回演習

Takako Fujiwara-Greve

- 大学院生の人は採点して多少成績に加味します。学部生の人は演習の答案を毎回提出すれば、期末試験の点が C と D の境目のときだけ出席点として使用しますが、白紙同然のものは提出したとはみなしません。まじめにやりましょう。

問題

1. マッチング問題で、カップルがいると安定な assignment が存在しないという例を考える。病院 h_1, h_2, h_3, h_4 がそれぞれ1人のインターンを受け入れたい。インターン候補の学生は4名（名前は $1, 2, 3, 4$）だが、1と2がカップルで、3と4もカップルだとする。病院側は学生の集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の上に strict ordering を持ち、学生側はカップルごとに病院のペア（どちらがどちらの病院に行くかも入れて、順序対）の集合

$$H = \{(x, y) \in \{h_1, h_2, h_3, h_4\}^2 \mid x \neq y\}$$

の上に選好を持つ。(病院のペア (x, y) では、x はカップルの中の名前の番号の小さい方の人、y はカップルの中の番号の大きい人がインターンとして行くところと解釈する。）例えば、カップル $(1, 2)$ が $(h_1, h_2) \succ_{(1,2)} (h_2, h_1)$ ということは、1さんが病院 h_1、2さんが病院 h_2 に行くことの方が1さんが h_2、2さんが h_1 に行くよりカップルとして厳密に好ましいということになる。H の要素は順序にも意味があるので、$4 \times 3 = 12$ 個ある。

以下のような選好だったとする。（表の上が最も好まれる選択肢、下に行くほど好まれないとする。マッチしない $\emptyset$ は、どの病院、カップルにとっても最悪と仮定して書いていない。）

$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{h_4}$	$\succ_{(1,2)}$	$\succ_{(3,4)}$
4	4	2	2	(h_1, h_2)	(h_4, h_2)
2	3	3	4	(h_4, h_1)	(h_4, h_3)
1	2	1	1	(h_4, h_3)	(h_4, h_1)
3	1	4	3	(h_4, h_2)	(h_3, h_1)
				(h_1, h_4)	(h_3, h_2)
				(h_1, h_3)	(h_3, h_4)
				(h_3, h_4)	(h_2, h_4)
				(h_3, h_1)	(h_2, h_1)
				(h_3, h_2)	(h_2, h_3)
				(h_2, h_3)	(h_1, h_2)
				(h_2, h_4)	(h_1, h_4)
				(h_2, h_1)	(h_1, h_3)

このとき可能な assignment は $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りあるが、どれも何らかの病院と学生のペアに関して安定でないことを以下の表を使って（一部）確認する。例えば、第1行の assignment 1 はカップル側から見ると $(1, 2)$ に (h_1, h_2) が割り当てられ、$(3, 4)$ に (h_3, h_4) が割り当てられたことになる。このとき、$4 \succ_{h_2} 2$ かつ $(h_3, h_2) \succ_{(3,4)} (h_3, h_4)$ であるから、病院 h_2 とカップル (3,4) が現在の相

手との（部分）交換に合意できるので、安定ではない。交換できる部分を unstable part として表に明記してある。

同様にして表の穴 (a),(b),(c),(d) を少なくとも１つの病院と学生の名前で埋めなさい。理由も書くこと。（興味のある人は 24 通り全てが不安定であることを調べてみよう。）

assignment	h_1	h_2	h_3	h_4	unstable part
1	1	2	3	4	h_2, 4
2	1	2	4	3	(a)
3	1	3	2	4	h_4, 2
4	1	3	4	2	h_1, 4
5	1	4	2	3	(b)
6	1	4	3	2	(c)
7	2	1	3	4	(d)

2. N 人の社会で、選択肢の集合を A とする。A 内の要素の間には社会全員が共通に認める順序 $\leq$ があるとする。A 上のこの順序 $\leq$ に基づく「単峰性 (single-peakedness)」を満たす選好を以下で定義する。

   定義：個人 i の選好 $\succsim_i$ が単峰性を満たすとは、

   A の中に $\succsim_i$ にとって最も好ましい要素 x^* がただ一つ存在し、

   任意の $x, y \in A$ は $\leq$ という順序に関して x^* に「近い」方を好む。つまり、

   $$x < y \leq x^* \Rightarrow y \succ_i x$$
   $$x^* \leq y < x \Rightarrow y \succ_i x$$

   単峰性を満たす選好順序全ての集合を $\mathcal{S}$ とする。

   社会的厚生関数として、単純多数決ルール F^M を以下で定義する。

   任意の $x, y \in A$, 任意の $(\succsim_1, \ldots, \succsim_N) \in dom(F)$ について、

   $n(x \succsim_i y)$ を $x \succsim_i y$ である個人の数とすると、

   $xF^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_n)y \iff n(x \succsim_i y) \geqq n(y \succsim_i x)$。

   (a) 具体例を考えてみよう。$N = 5$、$A = \{a, b, c\}$ とする。A の上には $a < b < c$ という順序があるとする。このとき 5 人の選好が

   $a \succ_1 b \succ_1 c$

   $a \succ_2 b \succ_2 c$

   $b \succ_3 c \sim_3 a$

   $b \succ_4 a \sim_4 c$

   $c \succ_5 b \succ_5 a$

   であるとき、３通りのペア (a, b), (a, c), (b, c) について単純多数決ルールによる社会的選好 $F^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_5)$ が、

   （強い選好）$xF^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_5)y$ だが、$\neg yF^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_5)x$

   （無差別）$xF^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_5)y$ かつ、$yF^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_5)x$

のどちらであるか計算しなさい。

（$n(x \succsim_i y)$ をちゃんと調べて 3 つのペアについて書くということ。$\neg$ は否定の記号で "not" ということ。

また、$x \sim_i y \iff x \succsim_i y$ かつ $y \succsim_i x$ であることに注意。）

(b) N は任意の有限人、A も任意の有限集合とする。$dom(F^M) = \mathcal{S}^N$ すなわち、（広汎性をあきらめて）単峰性を満たす選好を持つ個人のみを対象とする。任意の $(\succsim_1, \ldots, \succsim_N) \in \mathcal{S}^N$ について、単純多数決ルールの値 $F^M(\succsim_1, \ldots, \succsim_N)$ は完備性を満たすことを証明しなさい。

(c) 引き続き N は任意の有限人、A も任意の有限集合、$dom(F^M) = \mathcal{S}^N$ とする。F^M は IIA を満たすことを証明しなさい。