

2022年度 ミクロ経済学中級Ib 期末試験解答

Takako Fujiwara-Greve

1. 証明：ある $X \in G_2$ が存在して、 $f^{-1}(X) \succ_X g^{-1}(X)$ であったとする。そこで、 $a' = f^{-1}(X)$ とすると (X は仮定により存在しているので、これを使うのがポイント)、

すべての $a \in G_1$ について $f(a) \succ_a g(a)$

であるから、この a' さんにとっても、 g で組んでいる相手より X さんの方がよく、 X さんも g で組んでいる相手より a' さんの方がよい。これは g の安定性に矛盾。 □

2. 証明：背理法の仮定として、 f は匿名性を満たすが独裁者 n がいたとする。 $N \geq 2$ なので、 π として、 $n \neq \pi(n)$ となるものが存在する。そのような π を取り、 $m = \pi(n)$ とする。匿名性より、どのように名前を入れ替えても結果が変わらないはずなので、任意の選好の組み合わせ \succ について n が最も好ましいと思っているものが f で選ばれるということは、 m が最も好ましいと思っているものも f で選ばれることになる。

つまり、任意の $x \in A$ について、

$$[x \succ_n y \text{ for any } y \in A \setminus \{x\}] \Rightarrow f(\succ) = x$$

かつ

$$[x \succ_m y \text{ for any } y \in A \setminus \{x\}] \Rightarrow f(\succ) = x$$

が両方成立するはずである。

しかし、 \mathcal{L}^N の中には n にとって最も好ましい選択肢と m にとって最も好ましい選択肢が異なるような選好の組み合わせが存在する。つまり一つの $\succ = (\succ_1, \dots, \succ_N)$ において \succ_n においては x が最も好まれているが、 \succ_m においては別な x' が最も好まれているというものが存在する。このとき、 $f(\succ)$ が1点集合であることに矛盾する。 □

3. (a) 嘘をつかないので、

$$x^*(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{argmax}_{x \in \{x_{12}, x_3\}} \sum_{i=1}^3 v_i(x) = x_3 \text{ が配分結果となる。}$$

一人ずつ欠けると、

$$x^*(\mathbf{v}_{-1}) = x^*(\mathbf{v}_{-2}) = x_3, x^*(\mathbf{v}_{-3}) = x_{12} \text{ である。つまり3さんだけが pivotal である。}$$

ゆえに各自の contribution は

$$t_i = [v_j(x^*(\mathbf{v})) + v_3(x^*(\mathbf{v}))] - [v_j(x^*(\mathbf{v}_{-i})) + v_3(x^*(\mathbf{v}_{-i}))] = 0, \quad i = 1, 2, \quad j \neq i, 3$$

$$t_3 = [v_1(x^*(\mathbf{v})) + v_2(x^*(\mathbf{v}))] - [v_1(x^*(\mathbf{v}_{-3})) + v_2(x^*(\mathbf{v}_{-3}))] = -4.$$

総効用はそれぞれ

$$u_1(x^*(\mathbf{v}), t_1) = u_2(x^*(\mathbf{v}), t_2) = 0, u_3(x^*(\mathbf{v}), t_3) = 10 - 4 = 6.$$

(b) 3さんは v_3 を表明するので、 $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, v_3)$ と書くと

配分の結果は $x^*(\tilde{\mathbf{v}}) = \operatorname{argmax}_{x \in \{x_{12}, x_3\}} \sum_{i=1}^3 \tilde{v}_i(x) = x_{12}$ と変化する。(1さんと2さんに絵を一つずつ配分する。)

一人ずつ欠けると

$$x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-1}) = x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-2}) = x_3, x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-3}) = x_{12} \text{ である。つまり、今度は3さんが pivotal ではなく、1と2が pivotal である。}$$

$\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, v_3)$ における各自の contribution は

$$t_i = [\tilde{v}_j(x^*(\tilde{\mathbf{v}})) + v_3(x^*(\tilde{\mathbf{v}}))] - [\tilde{v}_j(x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-i})) + v_3(x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-i}))] = 9 - 10 = -1, \quad i = 1, 2, \quad j \neq i, 3$$

$$t_3 = [\tilde{v}_1(x^*(\tilde{\mathbf{v}})) + \tilde{v}_2(x^*(\tilde{\mathbf{v}}))] - [\tilde{v}_1(x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-3})) + \tilde{v}_2(x^*(\tilde{\mathbf{v}}_{-3}))] = 0.$$

総効用は真実の v_i を使用して、それぞれ

$$\begin{aligned}u_i(x^*(\tilde{\mathbf{v}}), t_i) &= v_i(x_{12}) - t_i = 2 - 1 = 1, i = 1, 2, \\u_3(x^*(\tilde{\mathbf{v}}), t_3) &= 0.\end{aligned}$$

つまり 1 さんと 2 さんは厳密に効用が高まった。