2017年度　ミクロ経済学中級Ib期末試験解答

Takako Fujiwara-Greve

- 注意：この科目のレベルは一般の大学の視点からは「中上級」です。今後の履修者の勉強のために、試験問題は簡単なものではありませんが、成績は科目のレベルを考慮してつけています。（つまり、あまりにひどくなければ単位は来ます。）試験のときは諦めず、準備と当日にベストを尽くせばよいのです。

1. (a) 任意の企業 k を固定する。$(p_1, p_2, \ldots, p_L)$ のときの利潤 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^k = p_1 \cdot y_1^k + \cdots + p_L \cdot y_L^k$ を Y^k 内で最大にするベクトルを $\mathbf{y}^{*k}$ とすると、

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^{*k} \geqq \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^k,\ \forall \mathbf{y}^k \in Y^k$$

である。$p_1, p_2, \ldots, p_L$ は全て正であるから、$\sum_{j=1}^L p_j > 0$ である。したがって、上記の不等号の両辺に正の係数 $1/\sum_{j=1}^L p_j$ をかけても不等号の向きは変わらず

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^{*k} \geqq \frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^k,\ \forall \mathbf{y}^k \in Y^k$$

が成立する。つまり $\mathbf{y}^{*k}$ は $(\frac{p_1}{\sum_{j=1}^L p_j}, \frac{p_2}{\sum_{j=1}^L p_j}, \ldots, \frac{p_L}{\sum_{j=1}^L p_j})$ においても利潤を最大にする。 □

(b) 消費者 i を任意に固定する。この人の予算集合が変わらないことを示せばよい。$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_L)$ のときの予算制約は

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^i \leqq \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^i + \sum_{k=1}^K \theta_k^i \cdot \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^{*k} \tag{1}$$

を満たす $\mathbf{x}^i$ の集合である。

次に基準化された価格のときを考える。(a) より各 k について $\frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}\mathbf{p}$ における利潤を最大にする $\mathbf{y}^{*k}$ は変わらないので、$\frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}\mathbf{p}$ における所得は

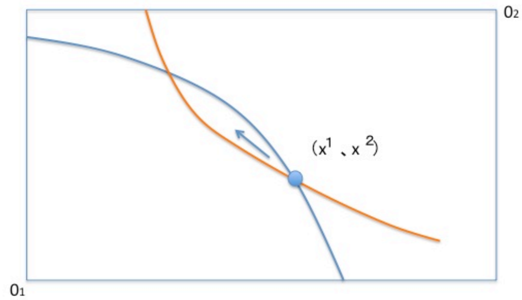
$$\frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^i + \sum_{k=1}^K \theta_k^i \cdot \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^{*k}]$$

となり、予算集合は

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^i \leqq \frac{1}{\sum_{j=1}^L p_j}[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^i + \sum_{k=1}^K \theta_k^i \cdot \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^{*k}]$$

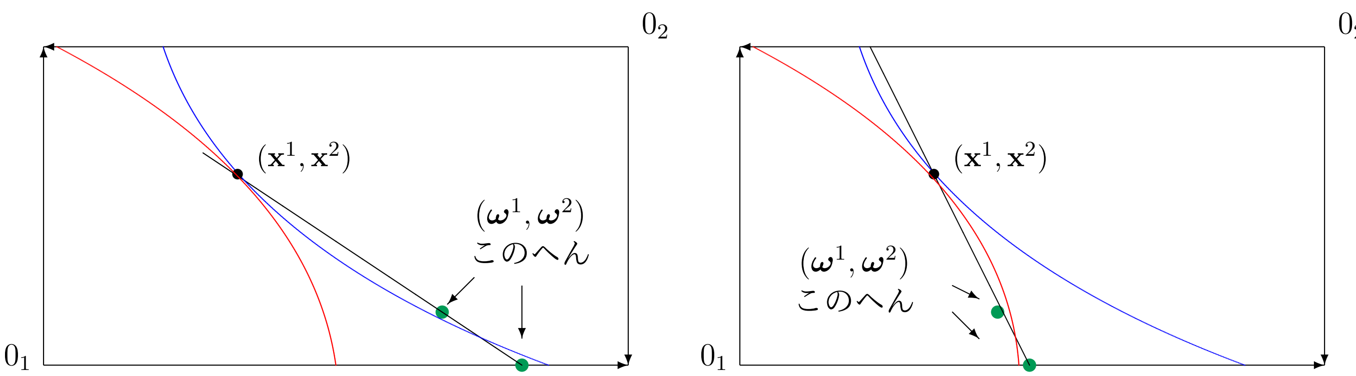
を満たす $\mathbf{x}^i$ の集合である。これは (1) の両辺に正の係数をかけたものであるから同じ集合である。 □

2. (a) ２財の図解、背理法で証明する。無差別曲線が接していないとすると、無差別曲線の強凸性より、図のように２人とも効用が高まる実現可能配分 $(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2)$ が存在する。すなわち $S = \{1, 2\}$ という提携と $(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2)$ が存在して、$\mathbf{z}^1 + \mathbf{z}^2 = \boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\omega}^2$ かつ $\mathbf{z}^i \succ_i \mathbf{x}^i$ for all $i \in S$ が成立するので、$(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ がコアに入ることに矛盾する。



（注：「コアに入る配分は効率的だから、無差別曲線が接する」とだけ書いた場合、部分点とする。「コアに入る配分は効率的」であることを証明するのが問題の真意だった。）

(b) (a) より $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ において 2 人の無差別曲線は接しているのに、競争配分でないということは、$\mathbf{x}^i$ と $\boldsymbol{\omega}^i$ を通る直線（予算線）は 2 人の upper countour sets を分離していないということである。分離していない方向としては（直線の傾きによって）以下の図のように 2 通り考えられる。即ち、消費者 1 の $\mathbf{x}^1$ を通る無差別曲線（青色の曲線）が直線の下に膨らむ部分に $\boldsymbol{\omega}^1$ があるとき（左）とないとき（右）である。ないときは逆に消費者 2 の $\mathbf{x}^2$ を通る無差別曲線（赤色の曲線）が $\boldsymbol{\omega}^2$ の側に膨らんでいるはずである。（予算線が接線でないから。）



黒の直線が予算線である。左のケースでは、消費者 1 について $\mathbf{x}^1$ と $\boldsymbol{\omega}^1$ の内分点のうち十分 $\mathbf{x}^1$ に近いもので $\mathbf{x}^1$ より効用が高いものが存在する。すなわち、
自然数 $n \in \{2, 3, \ldots\}$ が存在して $\frac{1}{n}\boldsymbol{\omega}^1 + \frac{n-1}{n}\mathbf{x}^1 \succ_1 \mathbf{x}^1$ が成立する。
（$\boldsymbol{\omega}^1$ が $\mathbf{x}^1$ に近ければ $\boldsymbol{\omega}^1 \succ_1 \mathbf{x}^1$ も成立するときがあるが、このときはもちろん $n = 2$ にしても $\frac{1}{n}\boldsymbol{\omega}^1 + \frac{n-1}{n}\mathbf{x}^1 \succ_1 \mathbf{x}^1$ が成立する。）
右のケースでは消費者 2 について成立する。

3. (a) 一般に弱い選好順序 $z \succsim_i w$ とは、 $z \succ_i w$ または $z \sim_i w$ のどちらかが成立しているということである。したがって、f が super-stable であるとは、
$[X \succ_x f(x)$ かつ $x \succ_X f^{-1}(X)]$ となるペア (x, X)、
$[X \succ_x f(x)$ かつ $x \sim_X f^{-1}(X)]$ となるペア (x, X)、
$[X \sim_x f(x)$ かつ $x \succ_X f^{-1}(X)]$ となるペア (x, X)、
$[X \sim_x f(x)$ かつ $x \sim_X f^{-1}(X)]$ となるペア (x, X)、
のどれも存在しないということになる。

このうち最初の3つの形のペアが存在しないことが strongly stable であるための条件なので、それは満たされる。 □

(b) しらみつぶしでいける。(あるいは Deferred Acceptance algorithm で b さんが A 君に先にプロポーズするのと B 君に先にプロポーズするものをそれぞれ考えてもいい。)

assignment は $f(a) = A,\ f(b) = B$ と $f'(a) = B,\ \ f'(b) = A$ しかなく、両者とも stable である。

f について：f が組み合わせていないのは (a, B) ペアと (b, A) ペアである。a さんは $f(a) \succ_a B$ であるから (a, B) ペアに変更しない。b さんも $f(b) \sim_b A$ だから (b, A) ペアになることを強く選好しない。ゆえに f は安定である。

f' について：f' が組み合わせていないのは (a, A) ペアと (b, B) ペアである。前者については A 君が $f'^{-1}(A) \succ_A a$ であるから (a, A) ペアに変更しない。後者については b さんが $f'(b) \sim_b B$ だから (b, B) ペアになることを強く選好しない。ゆえに f' も安定である。

(c) strongly stable な assignment はない。再び、assignment は $f(a) = A,\ f(b) = B$ と $f'(a) = B,\ \ f'(b) = A$ しかないから両方をチェックする。

f について：(b, A) ペアが存在して、$A \sim_b f(b)$ であるから $A \succsim_b f(b)$ が成立し、かつ $b \succ_A f^{-1}(A)$ が成立しているから strongly stable でない。

f' について：(b, B) ペアが存在して $B \succsim_b f'(b)$ かつ $b \succ_B f'^{-1}(B)$ が成立している。

(d) strongly stable な assignment がないので、(a) より super-stable な assignment も存在しない。