2013年度　ミクロ経済学中級Ib第1回演習(15分)

グレーヴァ香子担当クラス

- お友達と相談せず、自力でやりましょう。
- 白紙は出席とは見なしません。
- 院生の人は採点して、成績に加味します。

今回は定義を書いてあげますが、今後は自分のノートや参考文献から探してこられるようにしておいて下さい。いつ演習を行うかは事前にアナウンスします。

- 集合 $A \subset \Re^L$ が凸集合である：任意の $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A$ と任意の $\alpha \in [0,1]$ について、$\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}' \in A$。
- ２つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^L$ の距離を $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする。（なんでもいいが、はっきり決めたかったら $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_L - y_L)^2}$ でもいい。）
- 中心 $\mathbf{x} \in \Re^L$、半径 $r > 0$ の開球を $B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \Re^L \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$ とする。（等号がないことに注意。）
- 集合 $A \subset \Re^L$ が ($\Re^L$ において）開集合である： 任意の $\mathbf{a} \in A$ について $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathbf{a}) \subset A$$

　とできる。

- 集合 $B \subset \Re^L$ が ($\Re^L$ において）閉集合である：B の補集合 $B^c := \{\mathbf{x} \in \Re^L \mid \mathbf{x} \notin B\}$ が開集合である。[1]
- （注意：$\emptyset$, $\Re^L$ は開集合でもあり、閉集合でもある。）
- L 次元正象限 $\Re^L_{++} := \{\mathbf{x} \in \Re^L \mid x_j > 0, \ \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, L\}$
  L 次元非負象限 $\Re^L_{+} := \{\mathbf{x} \in \Re^L \mid x_j \geqq 0, \ \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, L\}$

問題

1. $\Re^2_{++}$ が開、凸集合であることを証明しなさい。（どうしてもうまく言葉で書けなかったら、図でもよい。論理をなんとか表現しよう。）
2. $\Re^2_{+}$ が閉、凸集合であることを証明しなさい。

[1] 人によっては、点列による定義を採用することもある：B 上の任意の点列 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \ldots\}$ (任意の $m = 1, 2, \ldots$ について $\mathbf{x}_m \in B$）について、その収束先があれば、必ず B に入っている $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m \in B$。つまりこれと「補集合が開集合」は同値。