2017 年度　ミクロ経済学初級 II 第 2 回演習解答

Takako Fujiwara-Greve

1. いろいろなラグランジェ関数の作り方があるが、変数を減らすとミスが減るので、$x_1 = 20 - z_1^A - z_1^B$ と $x_2 = y_2^A + y_2^B$ を効用関数に代入してしまって

$$\mathcal{L} = (20 - z_1^A - z_1^B) \times (y_2^A + y_2^B) + \alpha_1\big(y_2^A - \sqrt{z_1^A}\big) + \alpha_2\big(y_2^B - \sqrt{z_1^B} + \frac{1}{2}y_2^A\big)$$

とおいて一階の条件群を出すと以下のようになる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1^A} = -(y_2^A + y_2^B) - \alpha_1(\frac{1}{2\sqrt{z_1^A}}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1^B} = -(y_2^A + y_2^B) - \alpha_2(\frac{1}{2\sqrt{z_1^B}}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2^A} = 20 - z_1^A - z_1^B + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2^B} = 20 - z_1^A - z_1^B + \alpha_2 = 0. \quad (4)$$

これらと、技術制約（あるいは $\mathcal{L}$ を α_1, α_2 で微分した一階の条件）

$$y_2^A = \sqrt{z_1^A} \quad (5)$$

$$y_2^B = \sqrt{z_1^B} - \frac{1}{2}y_2^A \quad (6)$$

を連立して解くことになる。いろいろなやり方があるが、例えば (1) と (2) から $-(y_2^A + y_2^B)$ を消去して

$$\frac{\alpha_1}{2\sqrt{z_1^A}} = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{z_1^B}} \iff \sqrt{z_1^A} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sqrt{z_1^B}. \quad (7)$$

(3), (4) から $20 - z_1^A - z_1^B$ を消去して

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} = \alpha_2 \iff \alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2. \quad (8)$$

(8) を (7) に代入して

$$\sqrt{z_1^A} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sqrt{z_1^B} = \frac{1}{2}\sqrt{z_1^B}. \quad (9)$$

これを技術制約 (5), (6) に代入すると

$$y_2^A = \sqrt{z_1^A} = \frac{1}{2}\sqrt{z_1^B} \quad (10)$$

$$y_2^B = \sqrt{z_1^B} - \frac{1}{2}y_2^A = \frac{3}{4}\sqrt{z_1^B}. \quad (11)$$

これらを (1) に戻してやって、

$$-(y_2^A + y_2^B) - \alpha_1(\frac{1}{2\sqrt{z_1^A}}) = 0 \iff -\frac{5}{4}z_1^B = \alpha_1. \quad (12)$$

(10), (11), (12) を (4) に代入すると

$$20 - z_1^A - z_1^B - \alpha_2 = 0 \iff z_1^{Bo} = \frac{16}{3} \Rightarrow y_1^{Bo} = -\frac{16}{3} \tag{13}$$

あとは (13) を (7), (10), (11) に代入して

$$\begin{aligned} z_1^{Ao} &= \frac{4}{3} \Rightarrow y_1^{Ao} = -\frac{4}{3} \\ y_2^{Ao} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y_2^{Bo} &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

これらを $x_1 = 20 - z_1^A - z_1^B$ と $x_2 = y_2^A + y_2^B$ に代入して

$$x_1^o = \frac{40}{3}, \quad x_2^o = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}.$$

まとめると

$$\Big((x_1^o, x_2^o), (y_1^{Ao}, y_2^{Ao}), (y_1^{Bo}, y_2^{Bo})\Big) = \Big((\frac{40}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}), (-\frac{4}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}), (-\frac{16}{3}, \sqrt{3})\Big).$$

2. (a) 上に凸な関数であることを確認して、微分して $=0$ とすればよい。

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial z_1^A} = p_2 \frac{1}{2\sqrt{z_1^A}} - 1 = 0 \iff \sqrt{z_1^{A*}} = \frac{p_2}{2}$$

で、これが最適生産量でもある。

$$y_2^{A*} = \frac{p_2}{2}, \quad z_1^{A*} = \frac{(p_2)^2}{4}, \quad \Pi_A(z_1^{A*}) = \frac{(p_2)^2}{4}.$$

(b) y_2^{A*} を定数とみなすので、

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial z_1^B} = p_2 \frac{1}{2\sqrt{z_1^B}} - 1 = 0 \iff \sqrt{z_1^{B*}} = \frac{p_2}{2}.$$

最適投入量は $z_1^{B*} = \frac{(p_2)^2}{4}$ で企業 A と同じである。しかしこのときの生産量は

$$y_2^{B*} = \sqrt{z_1^{B*}} - \frac{1}{2} y_2^{A*} = \frac{p_2}{4}.$$

最大利潤は

$$\Pi_B(z_1^{B*}, y_2^{A*}) = p_2 \cdot y_2^{B*} - z_1^{B*} = 0.$$

(c) どんな方法でもいいが、

$$\frac{MU_1}{1} = \frac{MU_2}{p_2} \iff x_2 = \frac{x_1}{p_2}$$

より、効用が最大になるには $p_2 x_2 = x_1$ の比率で買えばよい。これを予算制約式に代入する。

$$2x_1 = 20 + \frac{(p_2)^2}{4} \iff x_1^* = 10 + \frac{(p_2)^2}{8}.$$

ゆえに

$$x_2^* = \frac{10}{p_2} + \frac{p_2}{8}.$$

(d) 第 1 財市場の需給一致条件に代入して、

$$x_1^* = 20 - z_1^{A*} - z_1^{B*} \iff 10 + \frac{(p_2)^2}{8} = 20 - \frac{(p_2)^2}{2} \iff p_2 = 4.$$

(e) 効率的配分からの効用は

$$(20 - z_1^{Ao} - z_1^{Bo}) \times (y_2^{Ao} + y_2^{Bo}) = \frac{40}{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 38.49.$$

競争配分からの効用は

$$(10 + \frac{4^2}{8}) \times (\frac{10}{4} + \frac{4}{8}) = 36.$$

ゆえに競争配分は効率的でない。