2009年度　ミクロ経済学中級b第1回演習解答

グレーヴァ香子担当クラス

1. 任意の $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in A+B$、任意の $\alpha \in [0,1]$ について $\alpha\mathbf{z} + (1-\alpha)\mathbf{z}'$ が $A+B$ に属することを示せばよい。

   $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in A+B$ より、$\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A$、$\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B$ が存在して、$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$、$\mathbf{z}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ である。これらを使って $\alpha\mathbf{z} + (1-\alpha)\mathbf{z}'$ を書き換えると、

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{z} + (1-\alpha)\mathbf{z}' &= \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (1-\alpha)(\mathbf{a}' + \mathbf{b}') \\ &= (\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}') + (\alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\mathbf{b}') \end{aligned}$$

   A, B が凸であることから、$\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}' \in A$、$\alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\mathbf{b}' \in B$ が成立するので、$\mathbf{a}^* = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}' \in A$、$\mathbf{b}^* = \alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\mathbf{b}' \in B$ が存在して $\alpha\mathbf{z} + (1-\alpha)\mathbf{z}' = \mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*$ と表せたことになる。従って $\alpha\mathbf{z} + (1-\alpha)\mathbf{z}'$ は $A+B$ に属する。 $\square$

2. 任意の $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) > u\}$ と、任意の実数 $\alpha \in [0,1]$ を取る。

   f の quasi-concavity から $f(\alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{y}') \geqq \min\{f(\mathbf{y}), f(\mathbf{y}')\}$ である。ここで、$f(\mathbf{y}) > u$ かつ $f(\mathbf{y}') > u$ であるから、$\min\{f(\mathbf{y}), f(\mathbf{y}')\} > u$ が成り立ち、凸結合 $\alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{y}'$ も集合 $\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) > u\}$ に属することがわかる。 $\square$