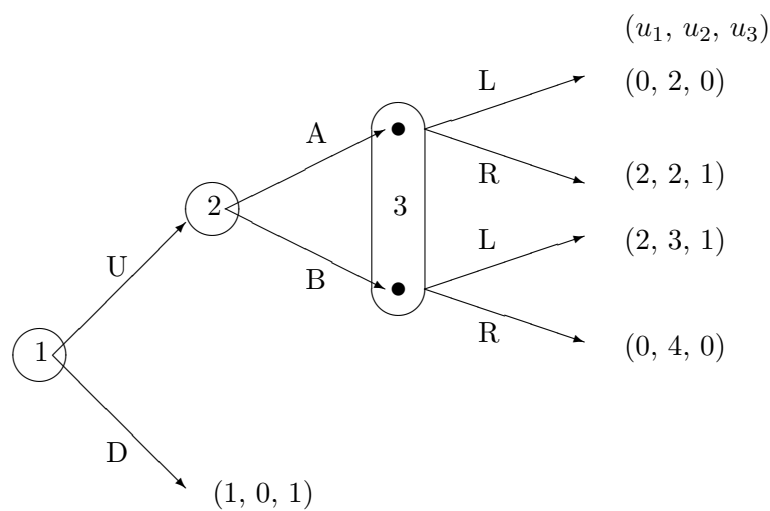


## 2023年度 ゲームの理論 a 演習第2回 (自宅学習用)

Takako Fujiwara-Greve

- K-LMS または Box のどちらかに提出できていれば提出とみなします。(白紙同然のものはカウントされません。ちゃんとやりましょう。) 他の場所、例えばグレーヴァにメール送信しても受け取りません。
- 院生の方は採点して多少成績に加味します。(K-LMS に提出したものを優先します。) 学部生の方は出した数をカウントし、CとDの境目のときに使用します。

1. 以下の樹形図で表される 3人完備不完全情報ゲームを考える。



- (a) 誘導標準形の表を書き、純戦略による全てのナッシュ均衡を求めなさい。
  - (b) プレイヤー 2 の情報集合から始まる、2人のプレイヤー (プレイヤー 2 と 3) による (真) 部分ゲームの純戦略によるナッシュ均衡を全て求めなさい。
  - (c) (b) を踏まえて、このゲームの純戦略による部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。
2. ある財の市場には 2 社しか生産者がいないとする。これらの企業の名前を 1 と 2 とする。両企業は同じ生産技術を持っており、企業  $i$  が  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) 単位生産するときの総費用は  $TC_i(q_i) = 2q_i$  である。消費者にとって両企業の製品は完全に同じとし、この市場で 2 社の生産量がそれぞれ  $q_1$  と  $q_2$  単位のときの逆需要関数 (全て売り切るための価格) は  $P(q_1, q_2) = 10 - (q_1 + q_2)$  である。2 企業は同時に生産量を選ぶというクールノー・ゲームを行っているとする。
- (a) 1 回限りのゲームで各企業の利得は利潤 (売上から生産費用をひいたもの) であるとして、クールノー均衡の生産量の組み合わせとそのときの企業 1 の利潤を求めなさい。
  - (b) 2 社は利潤の和を最大にするような談合を考えている。そのためには、2 社が合計して独占企業の生産量を供給することである。そこで、独占企業の問題をまず解く。独占企業の生産量を  $Q$  とすると、生産費用は引き続き  $TC(Q) = 2Q$  であり、逆需要関数は  $P(Q) = 10 - Q$  と考える。独占企業の利潤を最大にする生産量とそのときの利潤金額を求めなさい。

以下では、2 社が談合して両企業が独占利潤の半分ずつを長期に渡って得ることができるかを、無限回繰り返しクールノー・ゲームで考える。つまり、無限期間  $t = 1, 2, \dots$  にわたり、每期同時に

生産量を選び、利得は割引因子  $\delta \in (0, 1)$  を使って毎期の利潤を割り引いて合計したものとする。完全モニタリングを仮定し、期末にはお互いの生産量が判明するとする。

談合は grim-trigger 戦略で行うことを考える。每期 (b) で求めた独占企業の最適な生産量の半分ずつを両企業が生産するという約束を考える。繰り返しゲームの第 1 期と、どちらの企業もこの約束を守っている歴史の後では、各企業は約束を守る。どちらかの企業が約束を守らなかった歴史の後には、各企業は (a) で求めた一回限りのときのクールノー均衡の生産量をその後ずっと行うとする。

- (c) 上記の grim-trigger 戦略に両企業が従ったときの、無限回繰り返しクールノー・ゲームにおける企業 1 の割引総利得を求めなさい。(ヒント：毎期の利潤の列をまず求める。)
- (d) どの企業も約束を破っていない歴史を任意に取り、その後の部分ゲームを考える。企業 1 が 1 期だけ逸脱するとしたら、企業 2 が約束通り (b) の半分の生産量を選んでいるという前提でその期の利潤を最大にする生産量に逸脱する。この (1 期間で最適な) 生産量とそのときの 1 期間の利潤を求めなさい。
- (e) しかし期末には逸脱が判明するので、この後企業 2 は永遠に (a) の生産量を作るし、企業 1 も grim-trigger 戦略に戻るとすると同様に永遠に (a) の生産量を選ぶ。つまり、one-step deviation においては、1 期間だけ (d) で求めた利潤を得た後は每期 (a) で求めた利潤をもらうということになる。以上をまとめて、one-step deviation からの利得の列の割引総和を求めなさい。
- (f) (c) の方が (e) より悪くないとき、約束が破られていない歴史の後の全ての部分ゲームにおいて上記の grim-trigger 戦略の組み合わせがナッシュ均衡となる。<sup>1</sup>これが成立する  $\delta$  の下限を求めなさい。

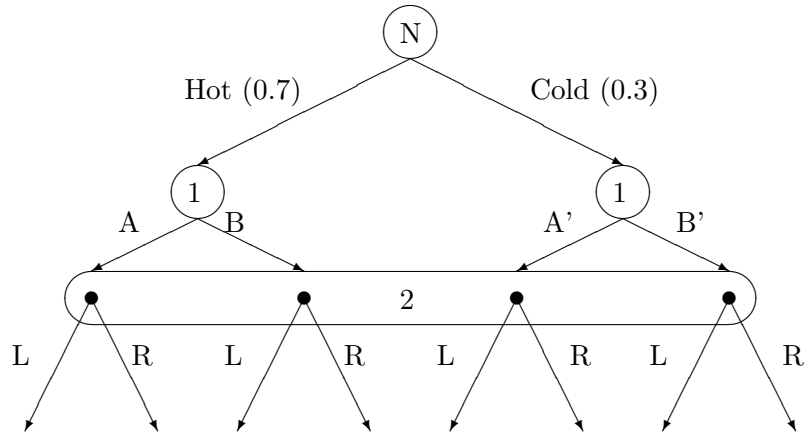
(どこかで約束が破られた任意の歴史の後の部分ゲームでは每期段階ゲームのナッシュ均衡の生産を行うということなので、これもナッシュ均衡である。従って、上の条件のときにこの grim-trigger 戦略の組み合わせは部分ゲーム完全均衡となり、談合が成立する！)

---

<sup>1</sup>本問で調べたものが企業 1 にとって最適な one-step deviation である。気になったら証明してみよう。また、企業 1 と 2 は対称的なので、企業 2 も同じ議論で約束が守られている歴史の後は逸脱しない。

3. 以下の2つの樹形図で表される完備情報の展開形ゲーム (a), (b) におけるプレイヤー1とプレイヤー2の純戦略の集合を書きなさい。

(a) 最初に Nature が Hot か Cold を選び、それがプレイヤー1には知らされるがプレイヤー2には知らされない。その後2人は同時ゲームを行う。



(b) 最初に Nature が Hot か Cold を選び、それは2人のどちらにも知らされない。その後2人は同時ゲームを行う。

