

# 2022年度 ゲームの理論 a 期末試験 (70分)

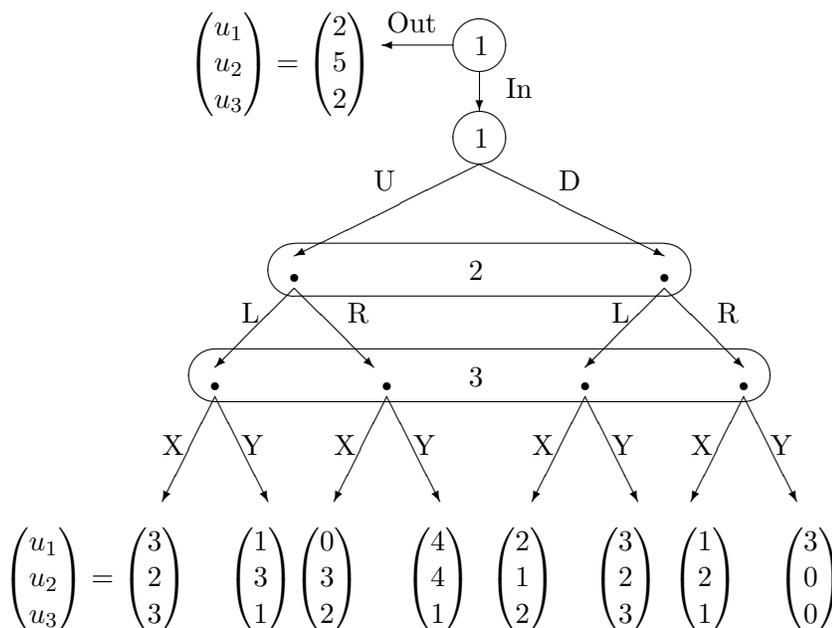
Takako Fujiwara-Greve

- 答案用紙は縦にめくるように書くこと。ノートのように横にめくってはいけない。
- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。
- 部分点があるので、導出の過程を必ず書きなさい。途中の論理がまったくなく、解答だけがあるものは（山勘かもしれないので）減点となる。「全て」と指定されているときに一部だけでもできれば途中点はある。尚、お話はすべてフィクションである。

1. 二人のプレイヤー K と W が以下の「貢献ゲーム」という同時ゲームをしているとする。二人は3つの数字 100, 10, 0 の中から一つを同時に選んでゲームが終わる。プレイヤー  $i = K, W$  が選んだ数字を  $s_i$  とし、相手が選んだ数字を  $s_j$  ( $j \neq i$ ) とすると、 $i$  がもらう利得は  $u_i(s_i, s_j) = \frac{3}{2}s_j - s_i + 10$  で表される。

- (a) この貢献ゲームの（双）行列表現を書きなさい。（利得は整数で書くこと、ただし正の整数とは言っていない。）
- (b) この貢献ゲームの枠組みの中でよいので混合戦略を厳密に定義しなさい。
- (c) 混合戦略の範囲で全てのナッシュ均衡を求めなさい。
- (d) この（同時）貢献ゲームを段階ゲームとし、完全モニタリングで無限回繰り返し、 $\delta \in (0, 1)$  という割引因子によって割り引いた利得の総和を最大にするゲームを考える。このとき行動の組み合わせ  $(0, 0)$  を每期行わせるような部分ゲーム完全均衡はあるか？あればその戦略の組とそれが部分ゲーム完全均衡となる  $\delta$  の範囲を求めなさい。なければ、どうしてないかを論理的に説明しなさい。
- (e) (d) の無限回繰り返しゲームにおいて行動の組み合わせ  $(10, 10)$  を每期行わせるような部分ゲーム完全均衡はあるか？あればその戦略の組とそれが部分ゲーム完全均衡となる  $\delta$  の範囲を求めなさい。なければ、どうしてないかを論理的に説明しなさい。

2. 以下の樹形図で表される完備、不完全情報の3人ゲームを考える。ゲームはプレイヤー1が In か Out を選ぶところから始まり、プレイヤー1が Out を選ぶと終わる。プレイヤー1が In を選ぶと2回目の意思決定を行い、プレイヤー2と3は1回の意思決定がある。利得は縦に第1座標がプレイヤー1、第2座標がプレイヤー2、第3座標がプレイヤー3のものである。

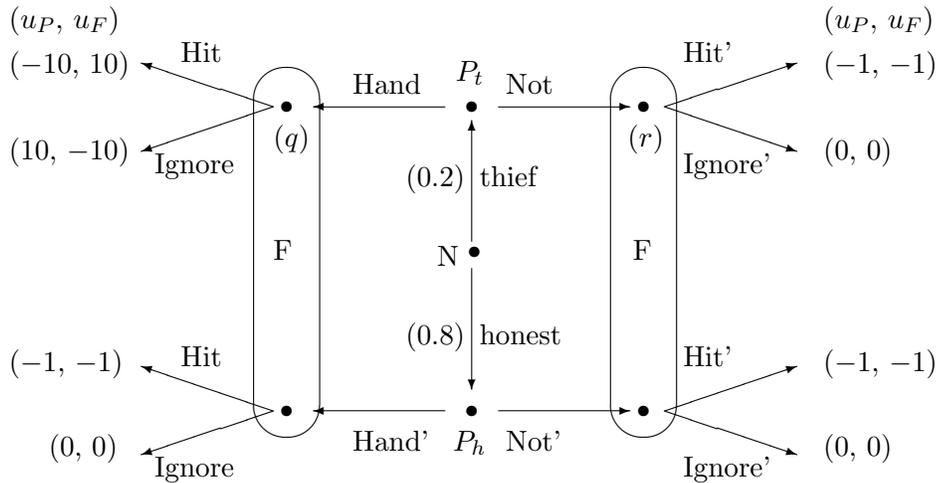


- (a) 真部分ゲーム (proper subgame) では3人の同時ゲームが行われていると解釈できる。その部分を取り出して3人ゲームの行列表現を書きなさい。このとき、プレイヤー1が行プレイヤー、プレイヤー2が列プレイヤー、プレイヤー3は行列プレイヤーとし、利得の第1座標はプレイヤー1の利得、第2座標はプレイヤー2の利得、第3座標はプレイヤー3の利得になるように表すこと。
- (b) (a) の真部分ゲームに制限したときの純戦略によるナッシュ均衡を全て求めなさい。
- (c) 展開形ゲーム全体を考え、純戦略による部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。均衡の導出過程を必ず書くこと。

3. ある人 P が散歩していて、スモモ園に入ってしまった。このスモモ園の持ち主 F が遠くからその様子を見ている。P 氏は帽子をかぶっているのだがちょっとずれてしまっている。P 氏はその向きを正そうとして手を頭上に上げるか (Hand)、何もしないか (Not) を選ぶことができる。ただし、最近ここではスモモ泥棒が出ており、園主 F は 0.2 の確率で P 氏が泥棒 (thief)、残りの確率でそうでない (honest) と思っており、P 氏もこのことに気づいたとする。泥棒が手を高く上げれば、スモモをいくつかすばやく帽子の中に入れて盗むことができるとする。泥棒であってもそうでなくても、手を上げなければ盗むことは不可能である。また P 氏が泥棒でなければ、手を高く上げるのは盗むためではなく純粋に帽子の向きを正すということである。

園主 F は P 氏が泥棒かどうかはわからないので P 氏の行動だけを見て、殴りかかる (Hit) か、見過ごす (Ignore) かを選んでゲームが終わるとする。

2人の利得は、P 氏が泥棒タイプで Hand を選び、F が殴りかかったときは泥棒がばれるので  $(u_P, u_F) = (-10, 10)$ 、泥棒タイプが Hand を選んだのに F が見過ごしたときは泥棒されて  $(u_P, u_F) = (10, -10)$  となる。その他の場合、P 氏が何をしても泥棒していないので、F が殴りかかると2人とも気まずくなって  $(u_P, u_F) = (-1, -1)$ 、F が見過ごすと  $(u_P, u_F) = (0, 0)$  であるとする。これを図解したものが以下で、P 氏の2つのタイプの情報集合は唯一の意思決定点から成る。このゲームは完備情報であるとする。



- (a) どちらのタイプの P も怪しいことをする、すなわち手を高く上げる (Hand/ Hand') を選ぶという一括戦略が行われる完全ベイジアン均衡は存在するか？あればそのような戦略の組み合わせと F の信念  $q, r$  を全て書き、どうしてそれが完全ベイジアン均衡であることを証明しなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。
- (b) どちらのタイプの P も手を上げない (Not/ Not') を選ぶという一括戦略が行われる完全ベイジアン均衡は存在するか？あればそのような戦略の組み合わせと F の信念  $q, r$  を全て書き、どうしてそれが完全ベイジアン均衡であることを証明しなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。
- (c) 上記の分析から何らかの意義を考えて書きなさい。