

2021年度 ゲームの理論 a 期末試験 (70分)

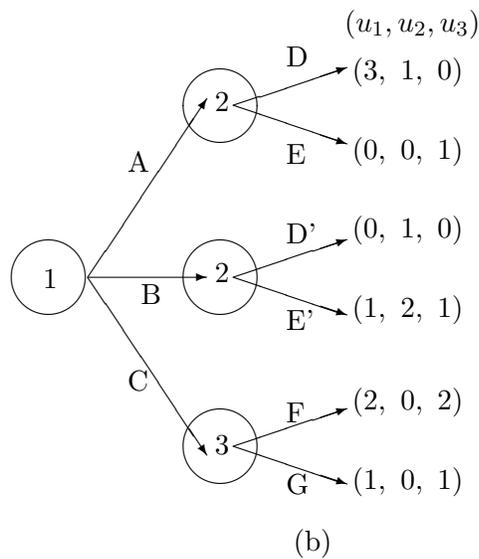
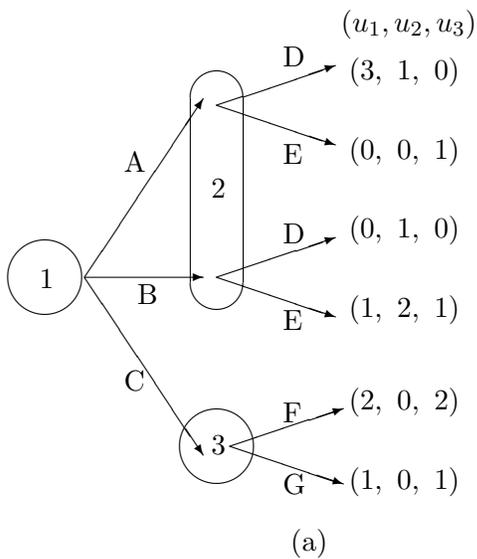
Takako Fujiwara-Greve

- A 4サイズの紙 1 枚のみ持ち込み可。
- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。分数はできる限り約分してくれるといいが、無理して小数にする必要はない。小数はそのままでよい。
- 部分点があるので、導出の過程を必ず書きなさい。途中の論理がまったくなく、解答だけがあるものは（山勘かもしれないので）減点となる。「全て」と指定されているときに一部だけでもできれば途中点はある。尚、お話はすべてフィクションである。

1. ある小さい町の電気店 A, B が人気商品である「X 社の 49 インチ 4K テレビ」という一つの商品の価格設定において同時ゲーム G をしている。両者の戦略は価格とし、簡単化のため両者とも 95, 97, 99（単位千円と考えてよいが、0 をたくさん並べずこのままの数字で議論してよい）の 3 つから選ぶとする。毎月お客は 2 人いて、安い方から買う。同じ値段だったら両方の店が 1 台ずつ売るとする。両店とも、利得は売り上げ高とする。例えば、A 店が 95, B 店が 97 をつけると、A 店の利得は 190、B 店の利得は 0 であり、両店の価格が同じ 95 であったら両店の利得はともに 95 である。

- (a) G を 1 回だけ行う（すなわちお客は 2 人）ときの（双）行列表現を書き、混合戦略の範囲で全てのナッシュ均衡を求めなさい。
- (b) G を無限回繰り返し、最初の月の利得はそのまま、それ以降の月の利得には $\delta \in (0, 1)$ という割引因子を、何ヶ月目かに応じてかけて足しあわせた割引総利得を最大にするという繰り返しゲームを考える。毎月お客が 2 人いて、同時ゲームであるが、両店は月末に相手の価格を知るという完全モニタリングであるとする。両店が談合して、毎月価格は 99 を維持するという行動が部分ゲーム完全均衡の経路になるか？なるならそのような均衡（これは経路だけでなく、全ての情報集合における行動計画である戦略の組み合わせ）と δ の範囲を求め、部分ゲーム完全均衡であることを証明しなさい。ならないなら、どうしてそのような部分ゲーム完全均衡が（どんな δ についても）存在しないかを論理的に説明しなさい。

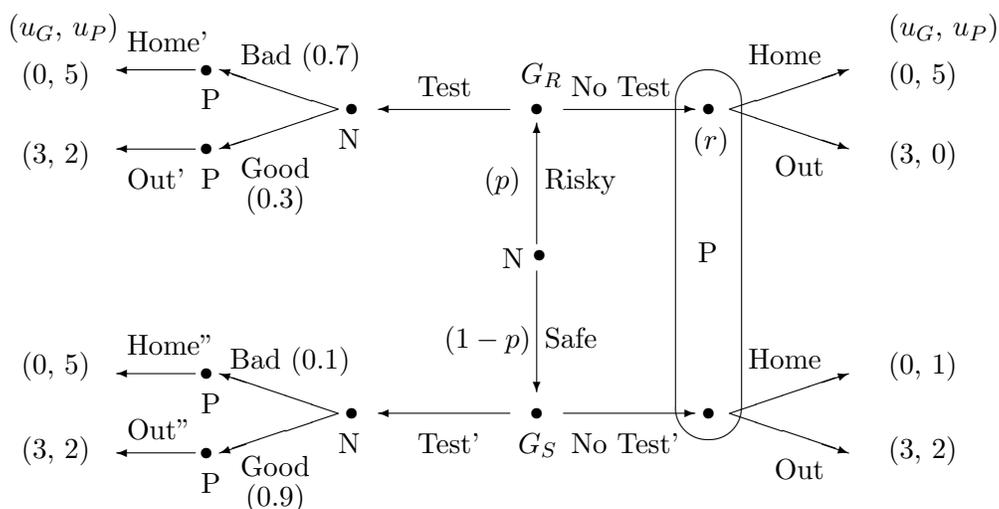
2. 以下の 3 人展開形ゲーム (a), (b) の部分ゲーム完全均衡をそれぞれ混合戦略の範囲で全て求めなさい。（できなければ純戦略の均衡だけでも部分点は与える。）



（裏に続く）

3. ある国ではパンデミックの状況が国民 (プレイヤー P) には完全にわかっていないが、政府 (プレイヤー G) はある程度把握している。この状況をベイジアン・フレームワークで分析する。最初に Nature がこの国の真実の感染状況について Risky または Safe を選び、政府はこれを知る。国民 P はわからないが Risky の事前確率を p (Safe の確率は $1 - p$) とし、これは共有知識であるとする。政府は Risky であることを知っている R タイプと、Safe であることを知っている S タイプがある。どちらのタイプも、大規模な検査を行う (Test) か、それをしない (No Test) という行動を選べ、行動は国民に観察される。検査がなければ、国民 P は単に自粛 (Home) または自粛しない (Out) を選んでゲームは終わる。大規模な検査を行うと感染状況が確率的に判明し (再び Nature が選ぶ)、感染状況が Bad のときは国民は Home を必ず選び、Good のときは Out を必ず選ぶものとする。感染状況の判明確率は Risky か Safe かで変わり、Risky のときは Bad である確率が 0.7、Safe のときは Bad の確率は 0.1 でありこれも共有知識とする。

どちらのタイプの政府も、国民の健康より経済が政権維持に大切と考えており、どのような経緯であれ国民が Out を選んでくれると利得が 3 であり Home を選ぶと 0 である。国民の利得はもっと複雑で、検査が行われて Bad であった、または Risky のときは Home の利得が 5 である。検査が行われ Good のときは Out の利得を 2 とする。検査が行われなかったときは Risky のときに Out を選ぶと 0、Safe のときに Out を選ぶと 2 であるとする。以上を樹形図で表現したのが下図である。真ん中の N の意思決定点から始まる。P の右の情報集合内の r は No Test/No Test' を見たとき、P が Risky であると思う確率 (信念 belief) である。



- R タイプの政府が Test を選んだ後の両プレイヤーの期待利得を書きなさい。
- S タイプの政府が Test' を選んだ後の両プレイヤーの期待利得を書きなさい。
- 国民はやや悲観的であり $p = 0.5$ とする。このとき、Risky タイプの政府は Test を、Safe タイプの政府は No Test' を選ぶという分離戦略が行われる完全ベイジアン均衡は存在するか？あればそのような戦略の組み合わせと国民の信念 r を全て書き、どうしてそれが完全ベイジアン均衡であることを証明しなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。
- 国民が楽観的であり $p = 0.1$ であるとする。このとき、どちらのタイプの政府も検査しない (No Test/ No Test') を選ぶという一括戦略が行われる完全ベイジアン均衡は存在するか？あればそのような戦略の組み合わせと国民の信念 r を全て書き、どうしてそれが完全ベイジアン均衡であることを証明しなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。