2021 年度　ゲームの理論 a 演習第 2 回解答

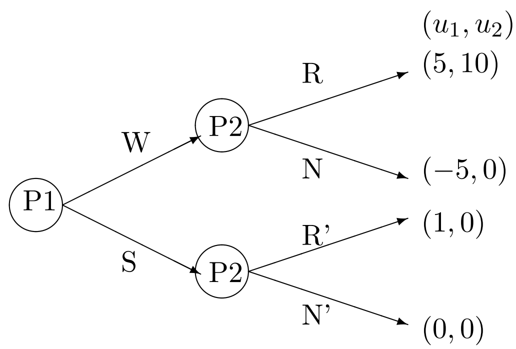
Takako Fujiwara-Greve

1. まず、純戦略の範囲で (D,d) というナッシュ均衡がある。
   次に、混合戦略の範囲でもこれしかないことを証明する。

   - P1 が A,B のみを正の確率で行う（B,C のみ、A,C のみ、も同様）:
     このとき P2 の最適反応は b または c またはこの 2 つの混合戦略（P1 が A と B を 1/2 で取るとき）である。
     しかし、P2 が b または c しかしないなら P1 の純戦略 A は最適反応にならないので、このようなナッシュ均衡はない。
   - P1 が A,D のみを正の確率で行う（B,D のみ、C,D のみ、も同様）:
     この時は P2 の最適反応は d または b である。
     しかし P2 が b または d しか行わないのであれば、P1 の純戦略 A は最適反応にならないので、このようなナッシュ均衡はない。
   - P1 が A,B,D の 3 つの純戦略だけを正の確率で行う（B,C,D のみ、A,C,D のみ、も同様）:
     この時の P2 の最適反応はいろいろなケースがあるが、a は正の確率で行われることはない。
     すると P1 の純戦略 A は最適反応にならないので、このようなナッシュ均衡はない。
   - P1 が A,B,C の 3 つの純戦略だけを正の確率で行う：
     この時も P2 の純戦略 a は最適反応の中に入らない。
     したがって、P1 の純戦略 A は P2 の最適反応に対して最適反応にならないので、このようなナッシュ均衡はない。

   P2 についても同様な場合分けで同じ議論ができる。 □

2. (a) 解答例は以下。R',N' が逆でもよい。完全情報なので意思決定点と情報集合を区別せず描いてある。



   (b) P2 の最適行動を考えると上の情報集合（W を見た後）は R だけが最適。しかし下の情報集合 (S を見た後）は R' も N' も共に最適なので、均衡になる可能性としては $s_2^* = (R, R')$ と $s_2^{**} = (R, N')$ がある。
   s_2^* に対しても、s_2^{**} に対しても P1 の最適戦略は W であるから、純戦略の範囲での後ろ向き帰納法の解は 2 つあり、 (W, s_2^*) と (W, s_2^{**}) である。
   ((W, R) です、と書いたら不正解。これは「均衡経路」である。）

   (c) （双）行列表現は以下である。

P1 \ P2	R	N
W	5, 10	−5, 0
S	1, 0	0, 0

純戦略のナッシュ均衡は 2 つあって (W,R) と (S,N) である。
次に混合戦略の均衡を求める。
P2 の混合戦略を R をする確率 $q \in [0,1]$ で表すと、

$$\begin{aligned} Eu_1(W,q) &= 5q - 5(1-q) \\ Eu_1(S,q) &= q \end{aligned}$$

より

$$Eu_1(W,q) \geqq Eu_1(S,q) \iff 5q - 5(1-q) \geqq q \iff q \geqq \frac{5}{9}$$

であるから P1 の最適反応は

$$BR_1(q) = \begin{cases} W & \text{if } q > \frac{5}{9} \\ \Delta(\{W,S\}) & \text{if } q = \frac{5}{9} \\ S & \text{if } q < \frac{5}{9} \end{cases}.$$

同様に、P1 の混合戦略を W をする確率 $p \in [0,1]$ で表すと

$$\begin{aligned} Eu_2(p,R) &= 10p \\ Eu_2(p,N) &= 0 \end{aligned}$$

より P2 の最適反応は

$$BR_2(p) = \begin{cases} R & \text{if } p > 0 \\ \Delta(\{R,N\}) & \text{if } p = 0 \end{cases}.$$

したがって無数の混合戦略ナッシュ均衡があって、P1 は純戦略 S, P2 は $q \in [0, \frac{5}{9}]$ の確率で R を、残りの確率で N を選ぶという混合戦略をする組み合わせである。
記号では $(0,q)$ such that $q \in [0, \frac{5}{9}]$ または、$(S, qR + (1-q)N)$ such that $q \in [0, \frac{5}{9}]$ のように書くと良い。