2019 年度　ゲームの理論 a 期末試験解答

Takako Fujiwara-Greve

三田に来ても、答案のひっくり返し方を理解していない人が結構います。名前を見ないように採点するためのシステムですので、指示通りに書きましょう！

1. $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n)$ をゲームとし、S_i はプレイヤー i の純戦略の集合とする。このとき純戦略の範囲でのナッシュ均衡とは純戦略の組み合わせ $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ で、全てのプレイヤー $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について、 s_i^* が他のプレイヤーの戦略の組み合わせ $s_{-i}^* = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, s_n^*)$ がナッシュ均衡のものであるとき、u_i を最大にしているというものである。

   すなわち、任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について

   $$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, s_n^*) \geqq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, s_n^*), \quad \forall s_i \in S_i$$

   であるものである。

   (最適反応を使ってもよいが、最適反応の定義をせず、単に「各自が他者の戦略の組み合わせに対して最適反応を行なっている」というだけだと少し減点。これでは定義が self complete でない。)

2. (a) **Step 1**: P1 を考える。P2, P3 のどんな混合戦略の組み合わせに対しても純戦略 A は純戦略 B に厳密に支配されている。

   したがって、任意の混合戦略 $p \cdot A + (1-p) \cdot B$（ただし $p > 0$) は純戦略 B に厳密に支配されている。

   このことから、全ての（混合戦略の範囲での）ナッシュ均衡において P1 は B をしていなければならない。

   Step 2: P3 がどんな混合戦略 $\sigma_3 = r \cdot E + (1-r)F$ をしようとも、P1 と P3 の戦略の組み合わせ (B, σ_3) に対して、P2 の純戦略 C は純戦略 D に厳密に支配されている。

   （なぜなら、任意の $0 \leqq r \leqq 1$ について $Eu_2(C, (B, \sigma_3)) = r \cdot 1 + (1-r) \cdot 2 < r \cdot 2 + (1-r) \cdot 3 = Eu_2(D, (B, \sigma_3))$ だから。）

   したがって、P2 にとって、任意の混合戦略 $q \cdot C + (1-q) \cdot D$（ただし $q > 0$) は純戦略 D に厳密に支配されている。

   Step 1 を踏まえると、全ての（混合戦略の範囲での）ナッシュ均衡において P1 は B を、P2 は D をしていなければならない。

   Step 3: P1 と P2 の戦略の組み合わせ (B, D) に対し、P3 の混合戦略の範囲での最適反応はただ一つあって、純戦略 F である。

   したがって、混合戦略の範囲でただ一つのナッシュ均衡があり、それは (B, D, F) である。

   （つまり「厳密に支配される戦略の逐次消去」を混合戦略の範囲で行えばよかった。「純戦略のナッシュ均衡」として求めて、混合戦略の範囲を探索していないことが明らかな場合、少し減点。）

   (b) P1 の D は P2 のどんな混合戦略に対しても最適反応にならないので、ナッシュ均衡を求めるときは以下の 2×2 ゲームに縮小して考えてよい。したがって混合戦略の範囲でただ一つのナッシュ均衡があり、$(\frac{3}{5}U + \frac{2}{5}M, \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}R)$ である。

P1 \ P2	L	R
U	0, 2	3, 0
M	3, 0	0, 3

   純戦略の範囲で minmax 値を求めるには以下のようにするとわかりやすい。P1 は第 1 座標の値を最大にするので、P2 の各純戦略についてその最大値を第 3 行に書く。P2 は P1 の各純戦略について第 2 座標の値を最大にするのでその値を第 3 列に書く。（要するに純戦略の範囲での最適反応の利得を書く。）

P1 \ P2	L	R	max u_2
U	0, $\underline{2}$	$\underline{3}$, 0	2
M	$\underline{3}$, 0	0, $\underline{3}$	3
D	1, $\underline{1}$	1, $\underline{1}$	1
max u_1	3	3	

P2 は第 3 行の値を L または R を選ぶことで最小にするが、どちらも 3 なので、P1 の minmax 値は 3 となる。P1 は U, M, D を選ぶことで第 3 列の値を最小にするので、P2 の minmax 値は 1 である。

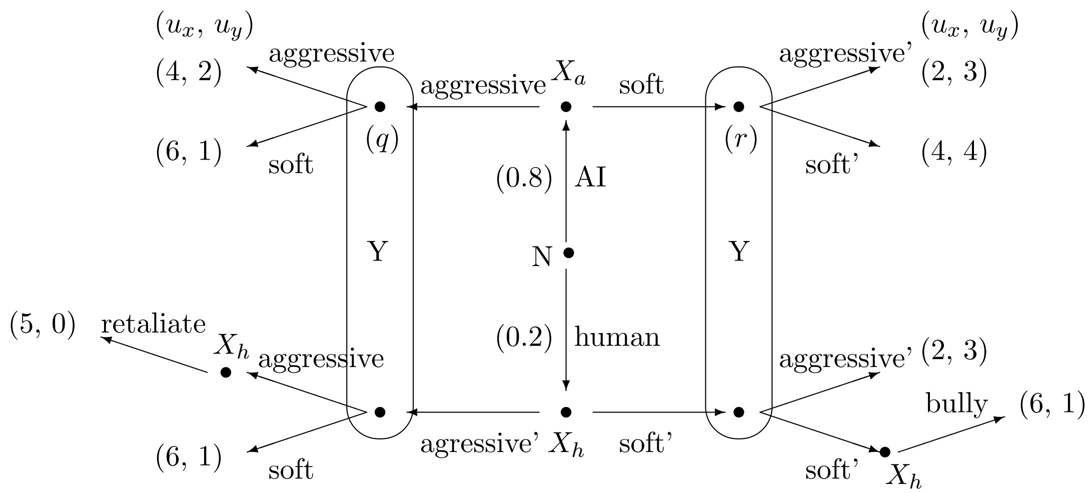
（この問題の意義は、P1 にとってあまり意味のない戦略 D が P2 を minmax するときには意味があるということである。）

3. (a) $(s_k^*, s_W^*) = ((\text{In}, A), A)$ と $(s_k^{**}, s_W^{**}) = ((\text{Out}, B), B)$ の 2 つ。（K さんは 2 つ情報集合があるので、Out の後も書かないと減点。）

   (b) 利得ベクトルは (1) (3, 1), (2) (0, 0), (3) (0, 0), (4) (1, 3) である。((u_K, u_W) の順であることに注意。）
   今度は K さんは情報集合が 3 つあるので、始点、W さんが A をしたのを見た後、W さんが B をしたのを見た後、の順に書くことにすると、$(s_k^*, s_W^*) = ((\text{Out}, A, B), B)$ のみが部分ゲーム完全均衡である。

   （Out が入っている均衡を単に「Out」と経路だけ答えたものは大きく減点した。均衡という概念を理解していないからである。）

4. 真部分ゲームのところは最適行動がわかるのでそれを使って図を簡略化しておくとよい（しかし戦略はとしては正しく書く。）



   (a) 4 つ。

   (b) X さんは 4 つも情報集合を持っているのでその戦略を (AI のときの行動、human のときの aggressive'/soft'、retaliate/not, bully/not bully) の順に書くとする。均衡であるとすると最後の 2 つは retaliate, bully でなくてはならない。(aggressive, soft', retaliate, bully) という戦略を X さんが行うとすると、整合的な信念は $q = 1$, $r = 0$ しかない。このときの Y さんの最適反応は（Y さんの戦略は（aggressive な X さんの行動を見たとき、soft な行動を見たとき）の順に書くとする） (aggressive, aggressive') しかない。
   しかし、Y さんの上記の戦略に対して、X_h タイプは最初の情報集合において aggressive' に逸脱すると 5 がもらえるが、soft' のときは 2 しかもらえていない。したがって当初の分離戦略は最適反応ではなく、このような完全ベイジアン均衡は存在しない。

(c) 今度は (aggressive, aggressive', retaliate, bully) が均衡になるかを考えればよい。Y さんは aggressive を見たら事前確率で予想して $q = 0.8$ が整合的な信念である。soft を見たときの信念 r が存在して、均衡になっていればよい。

soft を見たあと、Y さんが aggressive' をすると r が何であっても利得は 3 であるが、soft' をすると $4r + (1 - r)$ が期待利得であるから、Y さんの soft を見た後の情報集合における最適反応は aggresive' $\iff$ $r \leqq 2/3$ である。

Y さんが soft を見た後の情報集合で aggressive' をするなら、どちらのタイプの X さんも aggressive から逸脱しないので、均衡となる。したがってどちらのタイプの X さんも aggressive を選ぶ完全ベイジアン均衡は存在し、

((aggressive, aggressive', retaliate, bully), (aggressive, aggressive'), $q = 0.8$, $r \leqq 2/3$) という形ならよい。