2018年度　ゲームの理論a 期末試験解答

藤原グレーヴァ香子

1. (a) (A,A) と (B,B) 。

   （どこの本を見たのか知りませんが、(p1, p2) =(A,A) のような記述の人が散見されますが、P1 や P2 というプレイヤーの名前と間違えやすいので、戦略の組み合わせである、という感じで $(s_1^*, s_2^*) = (\mathrm{A}, \mathrm{A})$ などと書くのがよいです。採点では減点はしていません。）

   (b) (B,B) のみ。

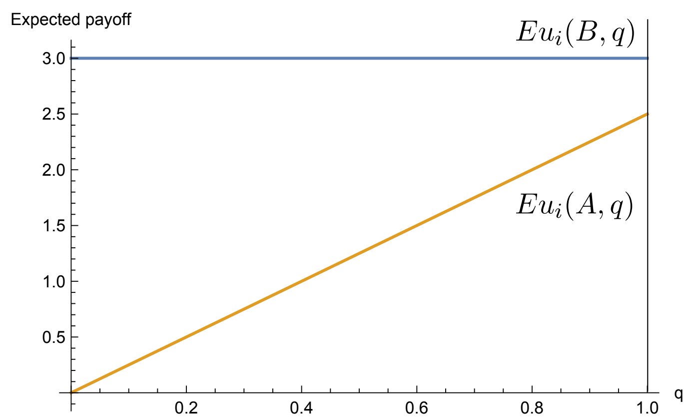
   (c) (A,A) のところだけ p に依存する。

P1 \ P2	A	B
A	$5p-5(1-p)$, $5p-5(1-p)$	0, 3
B	3, 0	3, 3

   （数学的に同値な表現ならよい。）

   (d) p が何であっても、どちらのプレイヤーも相手の B に対する最適反応は B なので、すでに (B,B) というベイジアン・ナッシュ均衡が存在する。これ以外にないようにするには、最適反応（対応）のグラフが他で交わらないようにしなくてはならない。

   そのためには、以下の図のように、相手の混合戦略を $q * A + (1-q) * B$ としたとき、純戦略 A から得られる期待利得が B から得られる期待利得を全ての $q \in [0,1]$ において下回っていることが必要十分である。（どこかの q で純戦略 A の期待利得が B のそれを上回ってしまうと、最適反応のグラフが (B,B) 以外のところで交点を持つ。図を描いてみよう。）$q=0$ のときは $Eu_i(A,q)=0$ で下回っているので、$q=1$ のときに下回っていればよい。これは可能であり、$Eu_i(A,1) = 5p-5(1-p) < 3 \iff p < 8/10 = 4/5 = 0.8$ が p の範囲である。（強い不等号でないとならない。）



2. (a) 部分ゲームとは、

   （１） １点から成る情報集合から始まり、

   （２）そこから先の全ての枝と節（行動と意思決定点）を含み

   （３）誰の情報集合も切らないもの。

   （情報集合、枝、節、行動、意思決定点、意思決定点の前後関係、なども定義してあったら追加点を与える！）

ある（展開形ゲームの）戦略の組み合わせ $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ が部分ゲーム完全均衡であるとは、全ての部分ゲームについて、$(s_1^*, \dots, s_n^*)$ をそこに制限したものがその部分ゲームのナッシュ均衡になっているもの。

（戦略の制限を定義してあったら追加点を与える！）

(b) Γ_1：完全情報なので、後ろ向きに解いて、s_1^* =(Down, b, c, f, g) と s_2^* =(B,C) の組み合わせ。（各プレイヤーの戦略の定義で、どの情報集合のときの行動かも明記すると厳密ですばらしいが、この書き方でだいたいわかるであろう。）

Γ_2：プレイヤー１の２回目の意思決定点群が真部分ゲーム群で、そこでの「ナッシュ均衡」とはプレイヤー１の利得最大化行動であるから (b,c,f,h) は同じ。これら以外にはゲーム全体という部分ゲームしかない。プレイヤー１の２回目の最適行動群を踏まえた Γ_2 ゲーム全体のナッシュ均衡を求めるには以下のような簡略化された同時ゲームを考えればよい。(例えば、Up, A だと b が最後に選ばれるので利得は (2,1) となる。その他も同様。)

P1 \ P2	A	B
Up	2, 1	3, 2
Down	4, 2	2, 1

この同時ゲームには純戦略によるナッシュ均衡が２つあるので、結局純戦略による部分ゲーム完全均衡も２つあり、

s_1^* =(Up, b, c, f, g) と s_2^* =B の組み合わせと

s_1^{**} =(Down, b, c, f, g) と s_2^{**} =A の組み合わせである。

（均衡経路だけを書いている答案が多々あった。特に導出がないものは減点した。）

3. (a) 言葉で書かれた状況を表にできるように。(対称ゲームなので K さんと W さんを入れ替えてもよい。)

K \ W	high	low	shirk
high	10, 10	1, 11	0, 12
low	11, 1	5, 5	0, 6
shirk	12, 0	6, 0	1, 1

(b) (shirk, shirk) のみ。

(c) ある。グリム・トリガー戦略を作れば良い。

第１期： high

第２期以降：これまでずっと (high, high) だったら high、そうでなかったら shirk.

という戦略を s^* と名付ける。

以下、相手が s^* に従っているとして、任意の部分ゲームを２種類に分けて分析する。

誰かが high をしなかった歴史の後の部分ゲーム：相手は今後どんな history でもずっと shirk してくるが、それに対する最適反応は任意の δ について s^* に従ってずっと shirk することである。

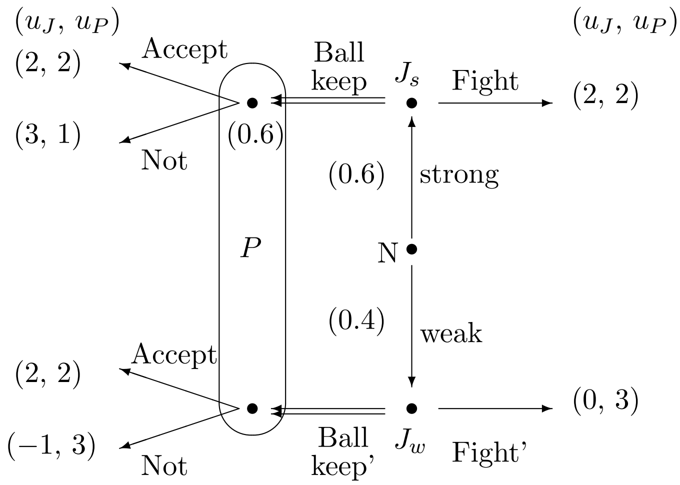
第１期またはこれまでずっと (high, high) だった歴史の後の部分ゲーム：相手は今期は high をしてくれる。動的計画法より、one-step deviation と s^* に従うことを比較すればよい。

one-step deviation で最も利得が高いのは今期 shirk を確率 1 でするもの。来期からは s^* に従うと２人ともずっと (shirk, shirk) となる。この割引総利得は $12 + \delta\frac{1}{1-\delta}$ である。これに対し、s^* にずっと従うと毎期 10 を得るので割引総利得は $\frac{10}{1-\delta}$ である。

$$\frac{10}{1-\delta} \geqq 12 + \delta\frac{1}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{2}{11}$$

なのでこのときに (s^*, s^*) は部分ゲーム完全均衡である。

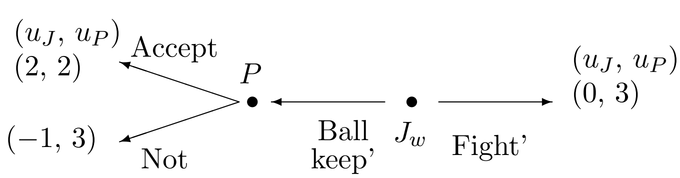
4. (a) J チームが一括戦略 (Ball keep, Ball keep') を行うと、$q = 0.6$ である。このとき、P チームの最適反応を考える。



Accept から得られる期待利得は 2、Not から得られる期待利得は $(0.6) \cdot 1 + (0.4) \cdot 3 = 1.8 < 2$ であるから、P チームの最適戦略は Accept である。

P チームが Accept するとき、Weak タイプの J チームは Fight' に逸脱すると利得が 2 から 0 に下がるので最適行動は Ball keep' である。Strong タイプの J チームは全ての行動が最適であるので、Ball keep も含まれる。従って、どちらのタイプもボール回しを選ぶ一括均衡は存在し、それは ((Ball keep, Ball keep'), Accept, $q = 0.6$) という戦略と信念の組み合わせである。

(b) $p = 0$ であると、ゲームは以下のような展開形ゲームとなる。



部分ゲーム完全均衡は後ろ向きに解けばよい。P チームは Not を選ぶのが最適であり、（weak タイプの）J チームはこれを踏まえて Fight' を選ぶのが最適となるので、ボール回しが正の確率で行われる部分ゲーム完全均衡は存在しない。