2018 年度　ゲームの理論 a 期末試験 (70 分)

Takako Fujiwara-Greve

- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。
- 部分点があるので、導出の過程を 必ず 書きなさい。途中の論理がまったくなく、解答だけがあるものは（山勘かもしれないので）減点となります。「全て」と指定されているときに一部だけでもできれば途中点はあります。尚、お話はすべてフィクションです。

1. 以下の同時２人ゲーム G_1, G_2 を考える。プレイヤーは P1 と P2 である。

P1 \ P2	A	B
A	5, 5	0, 3
B	3, 0	3, 3

G_1

P1 \ P2	A	B
A	-5, -5	0, 3
B	3, 0	3, 3

G_2

(a) 同時ゲーム G_1 の純戦略によるナッシュ均衡を 全て 求めなさい。

(b) 同時ゲーム G_2 の純戦略によるナッシュ均衡を 全て 求めなさい。

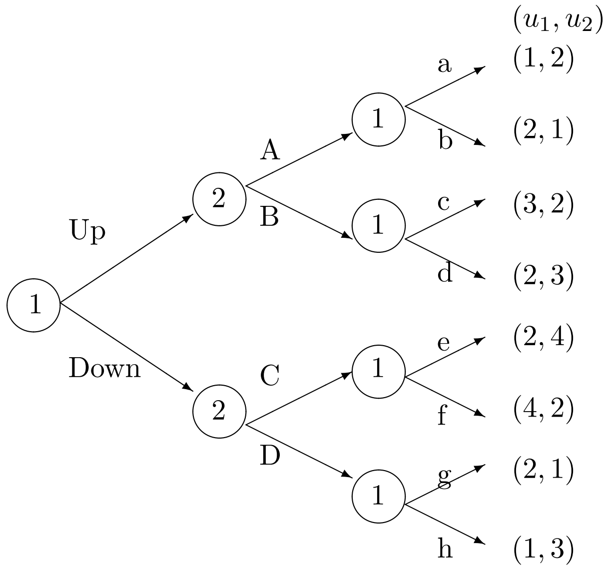
(c) 実は２人とも、どちらのゲームをしているのか完全にはわからないとする。そこで、最初に Nature が確率 p で G_1 を、確率 $1-p$ で G_2 を選び、しかしその結果は誰にも知らされず、２人が同時に A か B を選ぶというベイジアンゲームであるとする。このベイジアンゲームは完備情報であるとする。このベイジアンゲームが始まる前の時点での２人の期待利得の組み合わせは以下のような双行列表現で書ける。残りの３つの純戦略の組み合わせについても２人の期待利得の組み合わせを書きなさい。（答案用紙にこの表を書くこと。ヒント：p の関数になっている部分がある。）

P1 \ P2	A	B
A		
B		3, 3

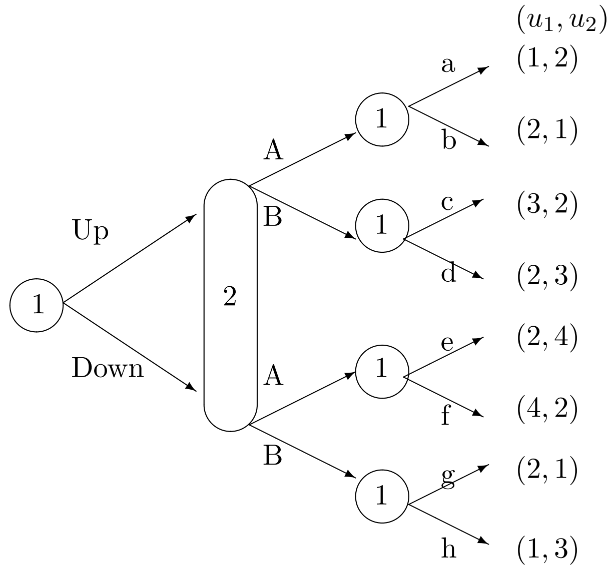
(d) (c) で作ったベイジアンゲームにおいて、ベイジアン・ナッシュ均衡がただ一つであるような p はあるか？もしあれば、そのような p の範囲を求めなさい。もしなければ、どうしてないかを論理的に説明しなさい。

2. (a) 部分ゲームの定義と部分ゲーム完全均衡の定義をできるかぎり正確に書きなさい。

(b) 以下の２人展開形ゲーム Γ_1, Γ_2 それぞれについて、純戦略による部分ゲーム完全均衡を 全て 求めなさい。（特に Γ_2 についてはどうしてそれらの戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡なのかわかるように書くこと。）



Γ_1



Γ_2

3. K さんと W さんは同じ職場のプロジェクトチームの同僚で、毎日のように顔を合わせている。まだ若いので、２人の関係は長期に続くものとして無限回繰り返しゲームで分析する。

   毎日２人は別々のデスクでプロジェクトのための仕事をし、その日の終わりに持ち寄ってお互いの仕事ぶりを確認する。つまり、同時ゲームを繰り返すが期末に完全モニタリングとなる。二人に共通の将来利得の割引因子を $\delta \in (0,1)$ とする。（１日を１期とする。）

   １日の仕事から得られる利得はお互いの行動の組み合わせに依存する。K さんも W さんも選べる行動の集合は同じで、高いレベルで努力する (high)、低いレベルで努力する (low) とさぼる (shirk) の３つである。利得関数は２人とも同じで、両者が high を選ぶと 10 ずつ、両者が low を選ぶと 5 ずつ、両者が shirk を選ぶと 1 ずつとなる。相手が high のとき自分が low を選ぶと 11, shirk を選ぶと 12 とする。相手が low のとき自分が high を選ぶと 1, shirk を選ぶと 6 となる。相手が shirk のとき自分が high または low を選ぶと 0 を得るとする。

   (a) 段階ゲームの（双）行列表現を書きなさい。利得の組み合わせを全て正確に書くこと。

   (b) 段階ゲームの純戦略によるナッシュ均衡を 全て 求めなさい。

   (c) 無限回繰り返しゲーム (**で二人とも割引総利得を最大化するもの**[*]) にしたとき、毎日 (high, high) が均衡経路で起こるような部分ゲーム完全均衡が存在する δ はあるか？あれば δ の範囲と、そのような部分ゲーム完全均衡をできる限り正確に書きなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。

4. サッカーチーム J と P が対戦していて試合時間は残り１０分である。このまま試合を終わらせれば、J チームはベスト１６に進出できそうであり、P チームも勝ちを得るので両者ともそこそこうれしい状況である。しかしゲームの結果は J チームの強さと両チームの行う戦略にまだ依存している。まずは J チームが、ボールを回すか (Ball keep)、そうでないか (Fight) を選ぶことができる。

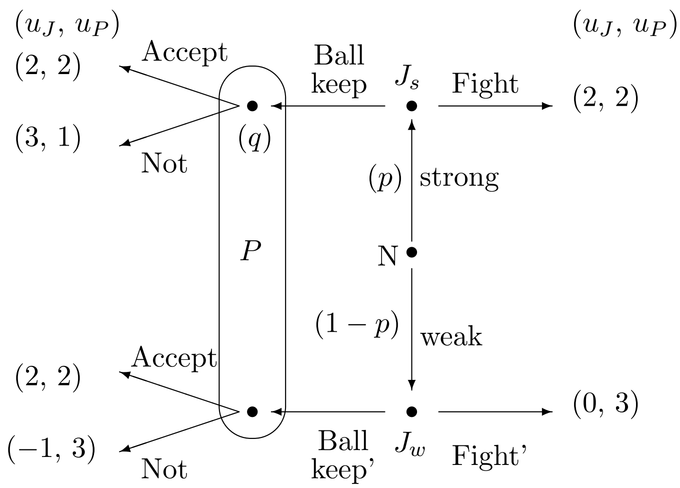
   J チームがボール回しを選択しないとそこで（試合ではなく）ゲームは終わり、J チームがもし強ければ (strong)、試合をコントロールしてお互い利得 2 を得る帰結に持ち込める。J チームが弱い (weak) のに

[*] 本試験問題ではこの部分を書いていませんでしたが、みなさん理解してくれてありがとう。

ボール回しを選択しなければ、P チームはさらに得点を重ね、J チームはベスト１６に進出できないので、J チームは利得 0、P チームは利得 3 を得るとする。

J チームがボール回しを選択すると、P チームの手番になり、それに応じて何もせず試合を終わらせる (Accept) か、それに応じず戦いを続ける (Not) かを選ぶことができる。P チームがボール回しに応じればJ チームが強い弱いに関わらずお互い利得 2 を得てゲームは終わる。ボール回しに応じない場合、強い J チームは怒って激しい戦いとなり、J チームが利得 3、P チームが利得 1 となる。J チームが弱かった場合、P チームがボール回しに応じずに戦うとさらに P チームが得点を重ね、P チームは利得 3 を得るし、J チームはベスト１６に進出できないばかりか、ボール回しをしようとしたと笑い者になって利得 -1 を得るとする。

P チームは J チームが強いかどうかを確実には知らず、Nature が事前確率 p で強いタイプを選び、J チームだけが自分のタイプを知るという、ベイジアン・フレームワークでこのゲームを考えると以下のような樹形図となる。(J チームの２つの意思決定点は 1 点から成る情報集合である。)



(a) $p = 0.6$ であるとき、どちらのタイプもボール回しを選ぶような一括均衡の完全ベイジアン均衡はあるか？あればそのような一括均衡を書きなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。

(b) J チームが弱いタイプであることがわかっている $p = 0$ の場合、ボール回しが正の確率で行われる部分ゲーム完全均衡は存在するか？あればそのような部分ゲーム完全均衡を書き、なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。