# 2018年度　ゲームの理論a 演習第2回解答

Takako Fujiwara-Greve

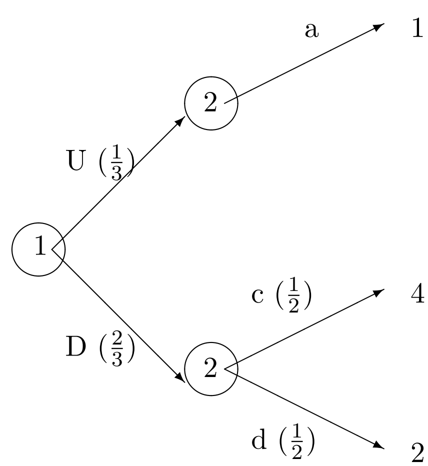
1. (a) （双）行列表現は以下のようになる。（プレイヤーの1と2を入れ替えてもよいとするが、対称ゲームでない場合はどちらかわかるように書くこと。）

| 1 \ 2 | H | D |
|---|---|---|
| H | $\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$ | $V, 0$ |
| D | $0, V$ | $V/2, V/2$ |

(b) 純戦略のナッシュ均衡は非対称で (H,D) と (D,H) である。混合戦略のナッシュ均衡は対称で、 $\sigma = \frac{V}{C} \cdot H + (1 - \frac{V}{C}) \cdot D$ とすると $(\sigma, \sigma)$ というものである。　（$V - C < 0$ かつ $V > 0$ だから $C > 0$ であり、$V/C < 1$ でもある。）

(c) $C$ が大きくなると、混合戦略均衡において H をする確率が下がる。

2. (a) まず、各枝の起こる確率から各終点の確率を求め、そこからプレイヤー2の期待利得を求める。




上の図より、

$$Eu_2\big(\frac{1}{3} \cdot U + \frac{2}{3} \cdot D, \frac{1}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} \cdot ad\big) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2) = \frac{7}{3}$$

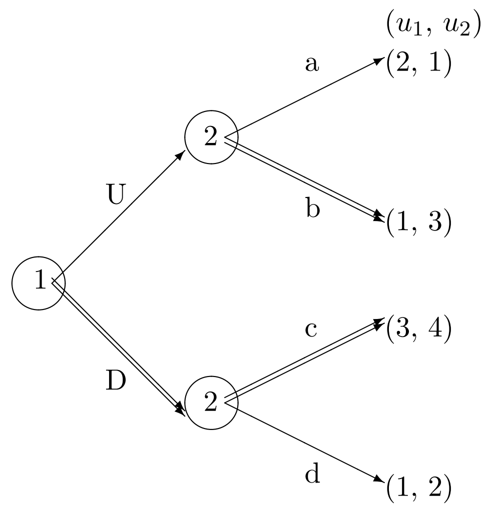
これと同じ期待利得を与える行動戦略として簡単なのは（上の情報集合での行動上の確率分布、下の情報集合での行動上の確率分布）の形で書くと、

$$\big(1 \cdot a + 0 \cdot b,\ \frac{1}{2} \cdot c + \frac{1}{2} d\big)$$

というものである。

展開形ゲームにおける混合戦略、行動戦略の定義をよく復習しよう。

(b) 後ろ向きの帰納法でやればわかりやすい。（部分ゲームはプレイヤー2の2つの情報集合それぞれから始まるものとゲーム全体である。）




プレイヤー2の上の情報集合での最適行動は $b$、下の情報集合での最適行動は $c$、これを踏まえてプレイヤー1の最適戦略は $D$ である。したがってただ一つの部分ゲーム完全均衡があり、それは純戦略の組み合わせ $(D, bc)$ である。

（$(D, c)$ と書くと、均衡径路のみなので、試験のときは減点。）

3. (a) Agent の期待利得は Effort を選ぶと $p \cdot b - c$、Shirk を選ぶと $(0.1)b$ であるから Effort を選ぶための $b$ の条件は

$$(p - 0.1) \cdot b \geqq c \iff b \geqq \frac{c}{p - 0.1}.$$

ゆえに下限は

$$\underline{b} = \frac{c}{p - 0.1}.$$

(b) (a) より、Principal は $\underline{b}$ 以上のボーナスを約束すれば Effort を選ばせることができる。その中で Principal の期待利得が最大になるのは、$\underline{b}$ そのものを約束したときである。このときの Principal の期待利得は

$$p(100 - \underline{b}) = p(100 - \frac{c}{p - 0.1}).$$

Principal は $b$ を $\underline{b}$ より低くして Agent に Shirk させることも可能である。このときの Principal の期待利得は

$$(0.1)(100 - b)$$

であるから、最適な $b$ は 0 であり、

$$p(100 - \frac{c}{p - 0.1}) \geqq (0.1)100 \iff (100 - \frac{10}{p})(p - \frac{1}{10}) \geqq c$$

（これらと数学的に同値であればよい）であれば Principal は $\underline{b}$ を約束し、Agent が Effort を選ぶことが部分ゲーム完全均衡になる。

(c) 候補1のパラメターにおいて

$$(100 - \frac{10}{p})(p - \frac{1}{10}) = (100 - \frac{10}{\frac{2}{10}})(\frac{2}{10} - \frac{1}{10}) = 50 \cdot \frac{1}{2} = 5 > 4$$

なので、部分ゲーム完全均衡の径路は Principal が

$$\underline{b} = \frac{4}{\frac{2}{10} - \frac{1}{10}} = 40$$

を約束して候補 1 が Effort を選ぶというものである。このときの Principal の期待利得は

$$\frac{2}{10}(100-40)=12.$$

候補 2 のパラメターにおいても

$$(100-\frac{10}{p})(p-\frac{1}{10})=(100-\frac{10}{\frac{3}{10}})(\frac{3}{10}-\frac{1}{10})=\frac{200}{3}\cdot\frac{1}{5}>11$$

なので、部分ゲーム完全均衡の径路は Principal が

$$\underline{b}=\frac{11}{\frac{3}{10}-\frac{1}{10}}=55$$

を約束して候補 2 が Effort を選ぶというものである。このときの Principal の期待利得は

$$\frac{3}{10}(100-55)=\frac{135}{10}>12$$

であるから、候補 2 を雇うのがよい。