2018年度　ゲームの理論a 演習第2回（45分）

Takako Fujiwara-Greve

- 白紙は出席とはみなしません。
- 講義ノート、テキスト等を見てもいいですが、お友達と相談せず自力でやりましょう。
- 院生の人は採点して多少成績に加味します。学部生の人は出席としてカウントします。
- この演習では全てのゲームを完備情報と仮定します。お話はすべてフィクションです。
- 純戦略 X と Y を確率 p と $1-p$ で混合した、混合戦略の表記としては $p \cdot X + (1-p) \cdot Y$ を採用して下さい。

  行動戦略においては、「行動 x と行動 y をそれぞれ確率 p と $1-p$ で行う」というようなことを各情報集合において書くので、それも同様に $p \cdot x + (1-p) \cdot y$ などと表記して下さい。

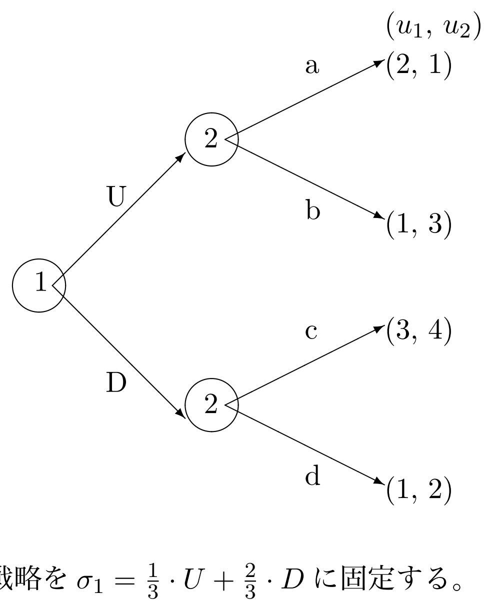
1. ２人対称同時ゲームを考える。プレイヤーは1と2とし、純戦略の集合は $S_1 = S_2 = \{$Hawk, Dove$\}$ であり、今後は頭文字でH戦略とD戦略と書く。利得関数は両者同じで、まず、「獲物」の大きさが V $(V > 0)$ である。自分がHを選び相手がDを選ぶとHを選んだ方が獲物を独占できて V そのものが利得となり、相手は0の利得を得る。両者がDを選ぶと、獲物を公平に分け合い、$V/2$ が両者それぞれの利得となる。両者がHを選ぶと、獲物をめぐって激しい戦いとなって獲物が壊れ $V - C < 0$ の大きさになってしまう。これを分け合って $(V-C)/2(<0)$ が両者それぞれの利得となるとする。

   (a) この同時ゲームの（双）行列表現を書きなさい。

   (b) 混合戦略の範囲で（純戦略も含める）全てのナッシュ均衡を求めなさい。

   (c) (おまけ）院生の人は、厳密な[1]混合戦略のナッシュ均衡において、戦いによる獲物の損傷の度合いである C が大きくなると均衡戦略の組み合わせがどう変化するか、比較静学の分析も行いなさい。

2. 以下の展開形ゲームを考える。プレイヤー1の純戦略はUとD、プレイヤー2の純戦略は上の情報集合での行動と下の情報集合での行動のペア、ac, ad, bc, bd の4つである。



   (a) プレイヤー1の混合戦略を $\sigma_1 = \frac{1}{3} \cdot U + \frac{2}{3} \cdot D$ に固定する。
   このとき、プレイヤー2の混合戦略 $\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot ac + \frac{1}{2} \cdot ad$ から得られるプレイヤー2の期待利得を求め、それと同じ期待利得をプレイヤー2に与えるプレイヤー2の行動戦略を1つ求めなさい。

[1]演習の時点ではこの部分が不明確でした。お詫びします。

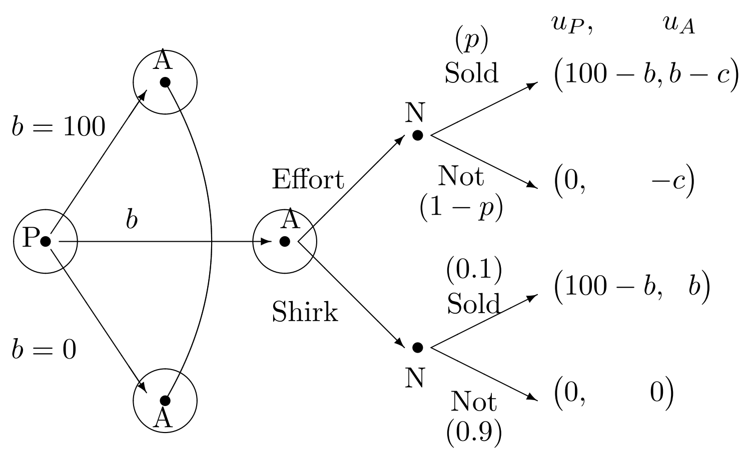
(b) このゲームの部分ゲーム完全均衡（完全情報だから後ろ向きの帰納法による解でも同じ）を全て求めなさい。

3. 自動車販売店の経営者 (Principal) とセールス担当者 (Agent) の間の展開形ゲームを考える。簡単化のため、自動車が 1 台売れるか、1 台も売れないかしかないような短期間であるとする。

まず Principal が、車が（1 台）売れたらボーナス b（万円）を払うと Agent に約束する。Principal は $0 \leqq b \leqq 100$ の中から選ぶものとする。

Principal の収入は 1 台売れたときは 100、1 台も売れなかったら 0 であるとする。売れるかどうかは Nature が選ぶものと設定される。ボーナスの約束を見てから Agent は努力する (Effort) かさぼる (Shirk) かを選ぶ。Agent が努力すると p $(0.1 < p \leqq 1)$ の確率で 1 台売れ、$1-p$ の確率で売れない。Agent がさぼったときに 1 台売れる確率は 0.1 である。Agent は努力すると不効用 $-c(<0)$ を得るが、さぼれば不効用はないとする。

Agent は Principal からの約束はすべて区別できるという意味で完全情報[2] とし、ゲームのおおよそと利得ベクトルを樹形図にまとめたものが以下である。(Principal が選べる b は無限個あるので完全な樹形図は描けない。ボーナスの約束は必ず履行されるものする。）各プレイヤーは利得の期待値を最大にするものとする。



(a) Agent にとって Effort を選ぶのが最適な戦略になるような b の下限を、p と c の関数として求めなさい。（ヒント：Shirk と無差別でも最適である。）

(b) (a) を踏まえて、Agent が Effort を選ぶことが均衡径路で起こる（純戦略による）部分ゲーム完全均衡（あるいは後ろ向きの帰納法の解）が存在する p と c の間の関係式を求めなさい。

(c) ２人の Agent の候補がいて、
候補 1 は $p=0.2$ で $c=4$、候補 2 は $p=0.3$ で $c=11$ である。
Principal はどちらを雇うべきかを、どちらかを雇った後で上のゲームを行い、そこで部分ゲーム完全均衡が起こるとして分析しなさい。

注：学部生の人はまったくできなくても、がんばって何かやればよいのです。出席としてしかカウントされません。めげないように。院生の人はなんとかしましょう。

[2] 正確にはボーナス支払いのときに Principal は Agent の行動は見えず、Nature の行動だけが見えるので、売れたかどうかだけに応じて支払いを決めないとならない。これが Hidden action あるいはモラルハザードと呼ばれる問題である。