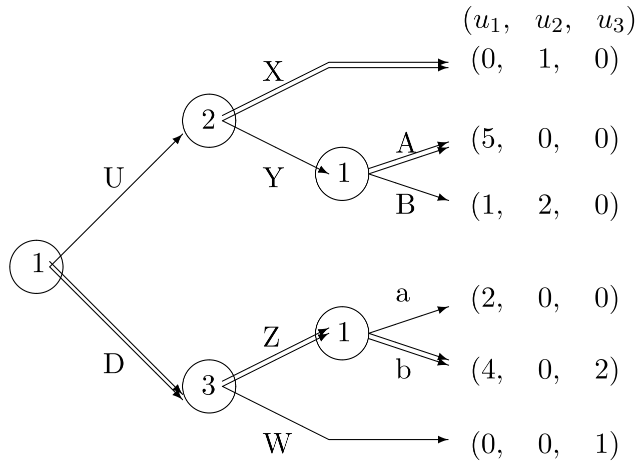
2017年度　ゲームの理論a 演習第3回解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) こちらのゲームには真部分ゲームが3つあり、完全情報なので後ろ向きの帰納法で求めればよい。２重矢印が最適な行動である。



Game (a)

図より、純戦略による部分ゲーム完全均衡はただ一つあり、(DAb, X, Z) である。（均衡は必ず戦略の組み合わせで書くこと。(D, Z, b）では均衡経路に過ぎないので、試験だったら減点。(4, 0, 2) などと書いたら０点！）

(b) こちらのゲームには真部分ゲームがないので、要するにナッシュ均衡を求めればよいというトリック問題。プレイヤー1の純戦略は $\{UA, UB, DA, DB\}$ の４つであることに注意。

$1 \setminus 2$	X	Y
UA	0, $\underline{1}$, $\underline{0}$	$\underline{5}$, 0, $\underline{0}$
UB	0, 1, $\underline{0}$	1, $\underline{2}$, $\underline{0}$
DA	2, $\underline{0}$, 0	2, $\underline{0}$, 0
DB	$\underline{4}$, $\underline{0}$, $\underline{2}$	4, $\underline{0}$, $\underline{2}$

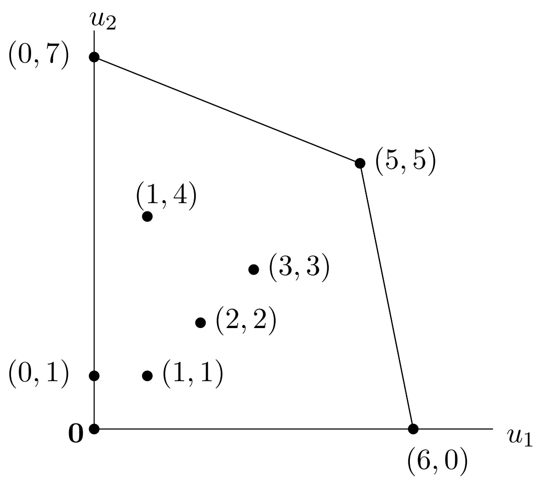
3: Z

$1 \setminus 2$	X	Y
UA	$\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{0}$	$\underline{5}$, 0, $\underline{0}$
UB	$\underline{0}$, 1, $\underline{0}$	1, $\underline{2}$, $\underline{0}$
DA	$\underline{0}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$	0, $\underline{0}$, $\underline{1}$
DB	$\underline{0}$, $\underline{0}$, 1	0, $\underline{0}$, 1

W

最適反応のところに下線を引いた。純戦略のナッシュ均衡は (DB, X, Z), (UA, X, W), (DA, X, W) の３つある。

2. (a) 下の図の線と内部。点は純戦略の組み合わせで達成できる利得ベクトル。



(b) 最適反応に下線を引くと以下のようになる。

P1 \ P2	L	C	R
T	5, 5	0, $\underline{7}$	0, 0
M	$\underline{6}$, 0	$\underline{3}$, 3	1, $\underline{4}$
B	1, 1	0, 1	$\underline{2}$, $\underline{2}$

ゆえに純戦略によるナッシュ均衡はただ一つあって (B,R) である。

(c) P1 と P2 それぞれが one-step deviation を行ってもその時点から先の割引総利得が高まらないことを、任意の歴史の後について証明する。また (b) の分析から $(a_1^*, a_2^*) = (B, R)$ である。

歴史は 2 種類あり、第 1 期または $(T,L),\dots,(T,L)$ という形のものと、そうでないものである。

• $t \geqq 2$ で $(T,L),\dots,(T,L)$ という形でない歴史の後

P1 も P2 も、今後はずっと段階ゲームのナッシュ均衡を行う。このときは任意の δ についてどちらのプレイヤーも自分だけ one-step deviation しても割引総利得は高まらないことは授業でやった。

• $t = 1$ または $(T,L),\dots,(T,L)$ という形の歴史の後

P1 について：P2 は問題文にあるグリム・トリガー戦略に従うとする。

自分も従うと今後の割引総利得は

$$5 + \delta \cdot 5 + \delta^2 \cdot 5 + \cdots = \frac{5}{1-\delta}$$

である。

今期だけ one-step deviation を行って来期からはグリム・トリガー戦略に従うとすると、今期の最大の利得は 6、来期以降は歴史が「$(T,L),\dots,(T,L)$ という形でない」ということになるので今期とそれ以降の割引総和は

$$6 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + \cdots = 6 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

である。したがって、P1 がグリム・トリガー戦略をするのが最適反応である条件は

$$\frac{5}{1-\delta} \geqq 6 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

である。

P2 について：同様にやると、P1 がグリム・トリガー戦略に従っているとき、P2 もグリム・トリガー戦略に従うのが最適反応である条件は

$$\frac{5}{1-\delta} \geqq 7 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

であり、こちらの条件を満たせば P1 の不等式も満たされる。したがって、δ の範囲は

$$\delta \geqq \frac{2}{5}.$$

3. (a) これは授業のスライドに書いてあったことをきちんと確認するという演習。単に微分して 0 でなく、その理由を書くこと。

$u_j(q_{1j}, q_2) = (A - q_{1j} - q_2)q_{1j} - c_j \cdot q_{1j}$ は q_{1j} に関して <u>上に凸な関数なので</u>q_{1j} で微分して

$$\frac{\partial u_j}{\partial q_{1j}} = A - q_2 - c_j - 2q_{1j} = 0 \iff q_{1j} = \frac{1}{2}(A - q_2 - c_j)$$

が利得を最大にする生産量である。あるいは、1 階微分の $\frac{\partial u_j}{\partial q_{1j}} = A - q_2 - c_j - 2q_{1j}$ が q_{1j} の減少関数なので、ちょうど 0 になるところが最大である。

(b) これもスライドにあった式の確認。$Eu_2(q_{1h}, q_{1\ell}, q_2) = [A - \{p \cdot q_{1h} + (1-p)q_{1\ell}\} - q_2]q_2 - c_2 \cdot q_2$ も q_2 に関して上に凸な関数なので一階の条件でよい。

$$\frac{\partial Eu_2}{\partial q_2} = A - \{p \cdot q_{1h} + (1-p)q_{1\ell}\} - c_2 - 2q_2 = 0 \iff BR_2(q_{1h}, q_{1\ell}) = \frac{1}{2}(A - \{p \cdot q_{1h} + (1-p)q_{1\ell}\} - c_2).$$

(c) ３つを連立して解いて、

$$\begin{aligned} q_{1h}^* &= \frac{1}{6}\{2A + 2c_2 - (3+p)c_h - (1-p)c_\ell\} \\ q_{1\ell}^* &= \frac{1}{6}\{2A + 2c_2 - pc_h - (4-p)c_\ell\} \\ q_2^* &= \frac{1}{3}\{A - 2c_2 + pc_h + (1-p)c_\ell\} \end{aligned}$$

(d) 比較静学とは、パラメターの関数としての均衡の性質を調べることである。企業２の均衡戦略 q_2^* は

$$q_2^* = \frac{1}{3}\{A - 2c_2 + p(c_h - c_\ell) + c_\ell\}$$

と書けるから、$c_h > c_\ell$ より p の増加関数である。つまり、相手が競争力が低い（限界費用が高い）可能性が高まると均衡生産量が増えるということである。