2016 年度　ゲームの理論 a 期末試験解答

グレーヴァ香子

1. (a) 任意の $s_2 \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ を固定する。任意の $s_1 = 5, 6, 7, \ldots$ について

$$\begin{aligned} u_1(1, s_2) - u_1(s_1, s_2) &= (6 - 1 - s_2) - (6 - s_1 - s_2)s_1 \\ &= (6 - s_2) - 1 - (6 - s_2)s_1 + s_1^2 \\ &= (6 - s_2)(1 - s_1) - (1 - s_1^2) \\ &= (1 - s_1)(6 - s_2 - (1 + s_1)) \\ &= (1 - s_1)(5 - s_1 - s_2) \end{aligned}$$

$s_1 \geqq 5$ と $s_2 \geqq 1$ より、２つの括弧の項は両方とも負であり、全体としては正となる。 □

(b) まず、$s_1 = 4$ は $s_1 = 1$ に弱く支配されている戦略で、最適反応になる可能性があるのは $s_2 = 1$ のときだけであることを示す。(a) の計算より

$$u_1(1, s_2) - u_1(4, s_2) = (1 - 4)(5 - 4 - s_2) = -3(1 - s_2)$$

なので、$s_2 = 1$ のときだけ $u_1(1, s_2) = u_1(4, s_2)$、$s_2 \geqq 2$ のときは $u_1(1, s_2) > u_1(4, s_2)$ である。
では $s_2 = 1$ のとき $s_1 = 4$ が最適反応になるかというと

$$u_1(s_1, 1) = (6 - s_1 - 1)s_1 = (5 - s_1)s_1$$

であるから、これは s_1 に関して上に凸な関数で、$s_1 = 2.5$ のとき最大となる。従って、$s_2 = 1$ に対する最適反応は $s_1 = 4$ ではない。（$s_1 = 2, 3$ の両方が最適反応である。）

(c) 念のため $\{1, 2, 3, 4\}$ という戦略集合で（双）行列表現を書く。

P1\P2	1	2	3	4
1	4, 4	3, $\underline{6}$	$\underline{2}$, $\underline{6}$	$\underline{1}$, 4
2	$\underline{6}$, 3	$\underline{4}$, $\underline{4}$	$\underline{2}$, 3	0, 0
3	$\underline{6}$, $\underline{2}$	3, $\underline{2}$	0, 0	−3, −4
4	4, $\underline{1}$	0, 0	−4, −3	−8, −8

最適反応に下線をつけてある。従って純戦略のナッシュ均衡は (1, 3), (2, 2), (3, 1) の３つである。（利得で答えたら減点とする。）

2. (a) 純戦略のナッシュ均衡は (X, x) と (Y, y)。混合戦略のナッシュ均衡もあって、A が X と Y を混合するような B の x をとる確率を q とすると

$$3q = (1 - q) \iff q^* = \frac{1}{4}.$$

B が x と y を混合するような A の X の確率を p とすると

$$p = 3(1 - p) \iff p^* = \frac{3}{4}.$$

ゆえに混合戦略のナッシュ均衡は、それぞれ X, x の確率を第１座標とすると $((\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ である。

(b) A さんは情報集合が２つあるので、$S_A = \{$ (In, X), (In, Y), (Out, X), (Out, Y) $\}$。B さんは情報集合が一つしかないので、G の行動が展開形ゲーム全体の戦略と一致して、$S_B = \{$ x, y $\}$。

(c) 純戦略なので、G に入ったら (X,x) または (Y, y) をする。G に入るとしたら A さんが In を選ぶときであるが、(Y,y) を予想したら入らないので、((Out,Y),y) が一つの部分ゲーム完全均衡、また ((In, X), x) という組み合わせも部分ゲーム完全均衡である。

(d) ない。2 人とも In を選んだとして、その後の G において純戦略のナッシュ均衡ではどちらかのプレイヤーが 1 を得ることになるが、逸脱して Out を選べば 2 を得ることができるから。

3. (a) $(0.4)(-10) + (0.6)6 = -0.4 < 0$ より No が最適。

(b) K の情報集合に来る確率は $P(P_o) \cdot P(Try \mid P_o) \cdot (1-p_o) + P(P_\ell) \cdot P(Try' \mid P_\ell) \cdot (1-p_\ell) = (0.4)(1)(0.5) + (0.6)(1)(0.5) = 0.5$ で、そのうち上の意思決定点（外見タイプ）の事後（条件付き）確率は

$$\frac{(0.4)(1)(0.5)}{(0.4)(1)(0.5) + (0.6)(1)(0.5)} = 0.4$$

つまり事前確率と同じである。（これは $P(S) = 0.5$ が重要なのではなく、両方のタイプの成功確率が等しいというところだけで出る。）ゆえに整合的な信念は $r = 0.4$。最適な戦略は (a) と同じ計算になって、No。

(c) (b) よりどちらのタイプの皇子も Try しても失敗するか、成功しても求婚は受けれてもらえない。従って、Try (Try') からの利得は冒険のコストだけ（-10 または -5) であり、Not をする方がよい。つまり一括戦略 (Try, Try') をする完全ベイジアン均衡はない。

(d) このケースの信念は

$$r = frac(0.4)(1)(0.1)(0.4)(1)(0.5) + (0.6)(1)(0.9) = \frac{4}{58} \approx 0.069$$

で、Yes の期待利得は $\frac{4}{58}(-10) + \frac{54}{58}6 = \frac{142}{29} \approx 4.9 > 0$ となり、Yes が姫にとって最適戦略である。
このとき、P_o タイプが Try を選ぶときの期待利得は $(0.9)(-10) + (0.1)(20) = -7 < 0$ なので、P_o タイプは Try が最適ではない。つまり一括戦略 (Try, Try') をする完全ベイジアン均衡はない。（P_o タイプはコストが高い上にほとんど成功しない。）

(e) (Not, Try') のときの姫の整合的な信念は $r = 0$ である。P_ℓ タイプが Try' を選ぶと期待利得は $(0.1)(-5) + (0.9)25 > 0$ となり、Try' が最適である。P_o タイプは Try を選ぶと期待利得は $(0.9)(-10) + (0.1)20 < 0$ なので、Not が最適である。ゆえにただ一つの完全ベイジアン均衡が存在し、((Not, Try'), Yes, $r = 0$) というものである。