

## 2016年度 ゲームの理論 a 期末試験 (70分)

### グレーヴァ香子

- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。
- 部分点があるので、導出の過程を必ず書きなさい。途中の論理がまったくなく、解答だけがあるものは(山勘かもしれないので)減点となります。なお、お話はすべてフィクションです。

1. 2人のプレイヤー P1, P2 が  $\{1, 2, 3, \dots\}$  という正の整数の中から同時に1つの数を選ぶというゲームを考える。P1 が  $s_i \in \{1, 2, 3, \dots\}$  を、P2 ( $j \neq i$ ) が  $s_j \in \{1, 2, 3, \dots\}$  を選んだ時、P1 の利得は

$$u_i(s_i, s_j) = (6 - s_i - s_j)s_i$$

であるとする。つまり、対称ゲームである。また、このゲームは完備情報ゲームとする。

- (a) P1 の純戦略  $s_1 = 5, 6, 7, \dots$  は全て純戦略  $s_1 = 1$  に厳密に支配されることを証明しなさい。(厳密に支配される戦略の定義を正しく使うこと。できなかつたら、 $s_1 = 5$  のケースだけでもやれば途中点を与える。)
  - (b) P1 の純戦略  $s_1 = 4$  は P2 のどんな純戦略に対しても最適反応にはならないことを証明しなさい。
  - (c) このゲームの純戦略のナッシュ均衡があれば、出来る限り全て求めなさい。なければ、どうしてないかを論理的に説明しなさい。(ヒント:(a),(b)の分析から、ナッシュ均衡の候補となる戦略の集合が限定されるので、しらみつぶしでもできるはず。)
2. 2人のプレイヤー A さん、B さんがいる。まず A さんが In か Out を選び、Out を選んだ場合、そこでゲームが終わり、二人とも2の利得を得る。A さんが In を選んだ場合、以下の(双)行列表現で表される同時ゲーム G を行い、以下の表の利得を得てゲームが終わる。(A さんの最初の行動はもちろん2人に観察されるとする。完備情報ゲームとする。)

同時ゲーム G	A \ B	x	y
	X	3, 1	0, 0
	Y	0, 0	1, 3

- (a) G のナッシュ均衡を混合戦略(混合行動)も含めて全て求めなさい。
- (b) 上記の展開形ゲームにおける A さんの純戦略の集合と B さんの純戦略の集合をそれぞれ出来る限り正確に書きなさい。
- (c) 展開形ゲームの純戦略による部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。
- (d) 状況が変化して、A さんと B さんが同時に In か Out を選び、一人でも Out を選んだらそこでゲームが終わり、2人とも2の利得を得るとする。二人とも In を選んだら同時ゲーム G が行われ、G の利得を得てゲームが終わるということになったとする。このとき、二人とも In を選ぶような純戦略の部分ゲーム完全均衡があれば全て求めなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。

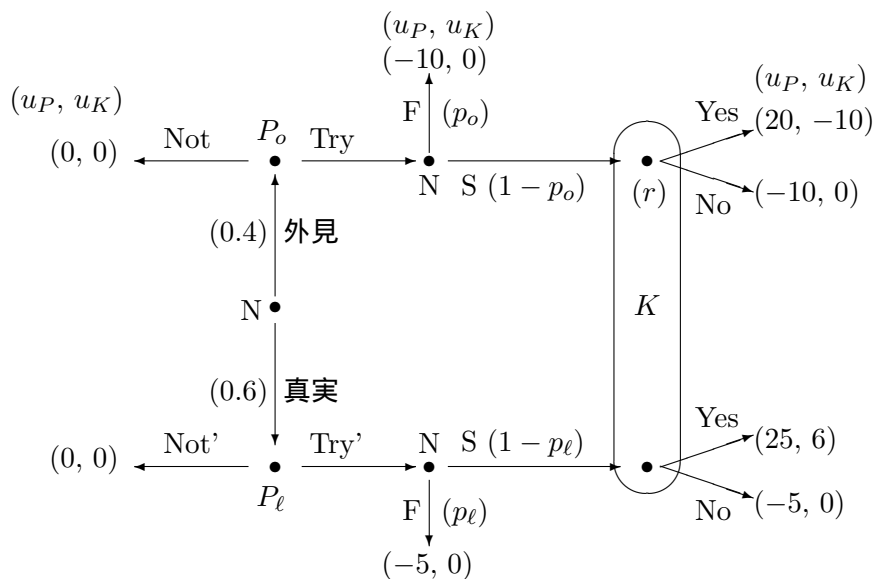
(裏面に続く)

3. 昔あるところにたいへん美しいかぐや姫 (K) という姫がいた。姫には皇子 (P) が求婚していた。しかし、皇子が姫の外見がよいので求婚しているのか、真実の愛で求婚しているのかを姫は知らず、この状況をベイジアンフレームワークで分析することにした。(あほらしいと思ったら、姫は資金繰りに苦しんでいる企業で、求婚している皇子は外資で、単にこの企業の技術だけを抜き取ろうとして買収を仕掛けて来ているか、本当にこの企業を救ってやろうと思っているかの状況だと思って実とは同じゲームである。)

事前確率は、外見だけで求婚している (タイプ  $o$ ) 確率を 0.4、真実の愛である (タイプ  $\ell$ ) 確率を 0.6 とする。外見だけで求婚されていた場合、求婚を受け入れる (Yes) を選ぶと姫の利得は  $-10$  で、真実の愛であった場合、Yes を選ぶと姫の利得は  $6$  であるとする。これらは Yes を言った後でわかることである。求婚を受け入れない (No) を選ぶと、皇子の真意がいずれにせよ姫の利得は  $0$  とする。

- (a) 姫は期待利得を最大にするとして、上の事前の状況では Yes, No どちらが最適か？

姫は皇子に、非常に見つけるのが難しい宝を持って来てくれないかともちかけた。皇子の真意 (タイプ) はわからないが、皇子がこの冒険をしない (Not) かする (Try) かは姫も観察することができるので以下の不完全情報ゲームとなる。(Nature が皇子のタイプを選ぶところから始まる。) 皇子は外見で求婚しているタイプより、真実の愛で求婚しているタイプの方が冒険のコストが低い。冒険をしなければゲームは終わり、冒険をすると、自然が成功  $S$  と失敗  $F$  を選び、失敗ならそこでもゲームが終わり、成功したときだけ姫が Yes または No を選ぶとする。利得は第 1 座標が (先手の) 皇子のもの、第 2 座標が姫のものである。このゲームは完備情報とする。



- (b) 失敗確率がどちらのタイプも同じで  $p_o = p_\ell = 0.5$  であるときを考える。皇子が一括戦略 (Try, Try') をするとき、姫 K の整合的な信念  $r$  と最適な戦略を求めなさい。
- (c) 引き続き  $p_o = p_\ell = 0.5$  のケースを考える。皇子が一括戦略 (Try, Try') をする完全ベイジアン均衡があるか？あれば戦略の組み合わせと姫の信念を正確に書きなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。
- (d) 愛があるタイプ  $P_\ell$  の方が成功しやすいケースを考え、 $p_o = 0.9$ ,  $p_\ell = 0.1$  とする。このとき皇子が一括戦略 (Try, Try') をする完全ベイジアン均衡があるか？あれば戦略の組み合わせと姫の信念を正確に書きなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。
- (e)  $p_o = 0.9$ ,  $p_\ell = 0.1$  のとき、皇子が分離戦略 (Not, Try') をする完全ベイジアン均衡があるか？あれば戦略の組み合わせと姫の信念を正確に書きなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。