2015年度　ゲームの理論a 期末試験 (70分)

グレーヴァ香子

- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。
- 部分点があるので、導出の過程を必ず書きなさい。途中の論理がまったくなく、解答だけがあるものは（山勘かもしれないので）減点となります。なお、お話はすべてフィクションです。

1. 以下の（双）行列で表される2人同時ゲーム G を考える。

P1 \ P2	L	R
A	1, 0	5, 1
B	2, 1	0, 0
C	0, 5	4, 4

(a) G の純戦略によるナッシュ均衡を全て求めなさい。

(b) G を2回繰り返すゲーム G^2 を考える。各回は同時ゲームであるが、1期目に2人が選択した G の純戦略（G^2 においては行動と呼ぶ）の組み合わせ（$\{A, B, C\} \times \{L, R\}$ の集合内のどれがおこったか）を観察してから2期目を行うという完全モニタリングを仮定する。G^2 の利得は2期間の G の利得を足したものとする。

G^2 において、1期目に (C, R) を行うような純戦略の部分ゲーム完全均衡はあるか？あればその戦略の組み合わせを正確に書き、部分ゲーム完全均衡であることを示しなさい。なければ、どうしてないのかを説明しなさい。

(c) G を完全モニタリングで無限回繰り返し、ゲーム全体の利得は、無限期間の利得の列を $\delta \in (0, 1)$ という割引因子を用いて割引総和にしたものとするゲーム $G^\infty(\delta)$ を考える。

毎期 (C,R) を行うような純戦略の部分ゲーム完全均衡を、G のナッシュ均衡（の一つ）を罰とするグリム・トリガー戦略の組み合わせで作りたい。$G^\infty(\delta)$ の部分ゲーム完全均衡となるようなグリム・トリガー戦略の組み合わせと、δ の下限を求めなさい。（注意：戦略は歴史の関数とわかるように書くこと。2人ともグリム・トリガー戦略から one-step deviation をしないような δ の下限を求めること。）

2. 2企業 X と Y が同時ゲームを行う。両企業とも選べる純戦略は同じで、High または Low である。企業 Y の利得関数は共有知識であるが、企業 X の利得関数は Y には完全にわからず、以下の2つの双行列のどちらかであることが共有知識であるとする。この状況をベイジアンゲームと考え、自然が確率 p で G_h を、確率 $1-p$ で G_ℓ を選び、企業 X はどちらの利得関数であったかを知った後で High または Low を、企業 Y は何もわからずに High または Low を選んで終わるゲームとする。

X \ Y	High	Low
High	3, 3	2, 0
Low	1, 0	0, 1

G_h (p)

X \ Y	High	Low
High	1, 3	0, 0
Low	3, 0	2, 1

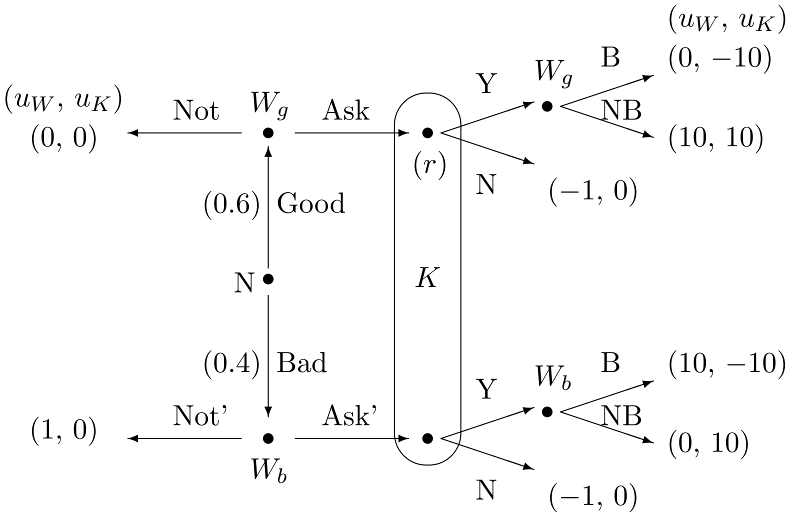
G_ℓ $(1-p)$

このとき、純戦略によるベイジアン・ナッシュ均衡を $p = 0.1$ と $p = 0.5$ のとき、それぞれについて求め、それがベイジアンゲームのナッシュ均衡であることを示しなさい。（企業 X はタイプ毎に戦略を選ぶとして、3人ゲームを解いてもいいし、条件付き戦略として2人ゲームの表を作って解いてもよい。）

(裏面に続く)

3. 時は戦国時代、小国の城主 W と隣国である大国の城主 K の 2 人展開形ゲームを考える。まず小国の城主 W が大国の城主 K に対して、同盟を求める (Ask) か求めない (Not) かを選択し、同盟を求めないならゲームは終わる。同盟を求めてきたら、大国の城主 K の手番となり、同意する (Y) かしない (N) かを選ぶ。K が同意しなければゲームはそこで終わる。K が同意したら、（しばらく後に）再び W の手番になり、W は裏切る (B) か裏切らない (NB) かを選んでゲームが終わる。

しかし、W の利得関数は共有知識でなく、裏切りをよしとしない Good タイプ（確率 0.6) と裏切るのが前提の Bad タイプの可能性があるとする。これを踏まえたベイジアン・フレームワークによる展開形ゲームを以下のようにする。均衡概念は完全ベイジアン均衡とする。



(a) このゲームにおいて、どちらのタイプの W も同盟を申し込むような一括均衡が存在するか？存在すれば、戦略の組み合わせとそれらに整合的な信念 r を求め、完全ベイジアン均衡であることを示しなさい。(注意：W の情報集合はたくさんあるので、それら全てにおける行動を明記すること。）存在しなければ、どうして存在しないかを説明しなさい。

(b) W は同盟を申し込むときには人質を付けるというゲームに変更する。同盟が成立した後で W が裏切ると、人質は殺され、どちらのタイプの W も $-C$ という利得のダメージを受けるとする。つまり、以下のような新しいゲームになるとする。$10 - C < 0$ であると仮定し、どちらのタイプの W も同盟を申し込むような一括均衡が存在するか？存在すれば、戦略の組み合わせとそれらに整合的な信念 r を求め、完全ベイジアン均衡であることを示しなさい。存在しなければ、どうして存在しないかを説明しなさい。