家計の効用最大化と消費需要

消費需要の決定因は，資産額と利子率とに要約される．

I. 効用最大化問題

A. 問題の標準形

$$\max_{c,a} \quad : \quad u = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(a_T)$$

$$a_t = (1+i)a_{t-1} + y_t - c_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad a_0 \text{ ：初期資産額，所与}$$

B. 制約条件

1. 多期間にわたる所得制約

$$a_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+i)^t} + \frac{a_T}{(1+i)^T}$$

2. ポンジ・ゲーム禁止条件 no-Ponzi-game condition

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_t}{(1+i)^t} \geq 0$$

負債が残る場合は，その増加が複利による元利合計の増加より遅いこと．
この条件の下で

$$a_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t}{(1+i)^t} \geq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{(1+i)^t}$$

II. 効用最大化理論の主要な帰結

A. 消費需要の決定因

1. 資産額

$$\sum_{t=1}^{T} \alpha_t y_t, \qquad \alpha_t = \frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_t)}$$

2. 利子率の時間径路　$\{i_1, i_2, \ldots, i_T\}$

B. 比較静学

1. 資産効果：　所得流列の変化，あるいは利子率の変化による
   a. 所得の恒常的上昇の意味
   b. 利子率変化の資産額に与える影響
2. 利子率変化の代替効果
   a. 利子率の上昇　→　将来財価格の相対的低下
   b. 将来財価格の相対的低下　→　現在財から将来財への代替

III. 不確実性下の効用最大化

A. 効用最大化問題

$$\max_{c,a} \quad : \quad \mathrm{E}[u] = \mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(a_T)\right], \qquad \beta = \frac{1}{1+\rho}$$

$$a_t = [(1-\theta)(1+i_t) + \theta(1+r_t)]a_{t-1} + y_t - c_t$$

$$t = 1, 2, \ldots, T, \qquad a_0 \text{ ：初期資産額，所与}$$

$$a_t = [(1+i_t) + \theta(r_t - i_t)]a_{t-1} + y_t - c_t$$

B. 限界代替率と価格比の均等条件

1. 不確実性のない場合

$$\frac{u'(c_{t-1})}{\beta u'(c_t)} = 1 + i_t, \qquad \frac{u'(c_{t-1})}{u'(c_t)} = \frac{1+i_t}{1+\rho}$$

2. 不確実性のある場合

$$(1+i_t)\,\mathrm{E}\left[\beta^t u'(c_t)\,|I_{t-1}\right] = \mathrm{E}\left[(1+r_t)\,\beta^t u'(c_t)\,|I_{t-1}\right] = \beta^{t-1} u'(c_{t-1})$$

$$\frac{u'(c_{t-1})}{\mathrm{E}\left[u'(c_t)\right]} = \frac{1+i_t}{1+\rho}$$

C. 資産効果の問題

1. 資産の一般概念：　将来にわたる利得獲得の手段
2. 人的資本と非人的資本　human wealth and nonhuman wealth
   a. 資本市場の不完全性
   b. 資金調達の難易

IV. ホールの分析

A. 限界効用の変動

$$\mathrm{E}\left[u'(c_t)\right] = \frac{1+i_t}{1+\rho} \cdot u'(c_{t-1})$$

B. ランダム・ウォーク仮説

1. 限界効用のランダ・ムウォーク：　$i_t = \rho, \quad t = 1, 2, \ldots$

$$u'(c_t) = u'(c_{t-1}) + v_t$$

2. 消費支出のランダム・ウォーク
   a. 近似計算
   b. 効用関数の特定

$$u(c) = -(c-a)^2, \qquad c_t = c_{t-1} + \epsilon_t$$

参考文献

Lectures. Chapter 6.

Friedman, Milton (1957) *A Theory of Consumption Function.* Princeton: Princeton University Press. Chapter 2.

Hall, Robert E. (1978) "Stochastic Implications of the Life Cycle Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence." *Journal of Political Economy* 86: 971–987.

Samuelson, Paul A. (1967) "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming." *Review of Economics and Statistics* 51: 239–246.

消費のランダム・ウォークを導く近似計算の説明

A. 仮定

1. $\rho \approx i_t$
2. $c_t \approx c_{t-1}$

B. 近似計算

1. $c_t = c_{t-1}$ のまわりの近似

$$u'(c_t) = u'(c_{t-1}) + \epsilon_t$$

$$u'(c_t) = u'(c_{t-1}) + u''(c_{t-1})(c_t - c_{t-1})$$

$$u''(c_{t-1})(c_t - c_{t-1}) = \epsilon_t$$

$$c_t = c_{t-1} + \eta_t, \qquad \eta_t = \frac{\epsilon_t}{u''(c_{t-1})}$$

2. $x = 0$, $\epsilon_t = 0$ のまわりの近似

$$u'(c_t) = (1+x)u'(c_{t-1}) + \epsilon_t, \qquad \frac{1+\rho}{1+i_t} = 1 + x, \qquad x \approx 0$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial x} = \frac{u'(c_{t-1})}{u''(c_t)}, \qquad \frac{\partial c_t}{\partial \epsilon_t} = \frac{1}{u''(c_t)}$$

$$c_t = c_{t-1} + \frac{u'(c_{t-1})}{u''(c_{t-1})} \cdot x + \frac{\epsilon_t}{u''(c_{t-1})}$$

$$c_t = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1+\rho}{1+i_t} \cdot c_{t-1} + \eta_t, \qquad \gamma = -\frac{cu''}{u'}, \quad \eta_t = \frac{\epsilon_t}{u''}$$

3. ホールの近似計算の結果

$$c_t = \left(\frac{1+\rho}{1+i_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} c_{t-1} + \eta_t$$