

合理的期待に関する補足

このノートでは、合理的期待仮説の説明に関する計算の詳細を示す。

均衡価格およびその合理的期待の白色雑音による表現

1. モデル

$$x_t^S = bp_t^e + u_t, \quad x_t^D = -dp_t, \quad x_t^S = x_t^D$$

$$u_t = \varepsilon_t + w_1\varepsilon_{t-1} + w_2\varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \quad E[\varepsilon_t\varepsilon_{t'}] = 0, \quad t' \neq t \quad (\text{白色雑音})$$

2. 合理的期待仮説：モデルの完結

$$p_t^e = E[p_t^* | I_{t-1}] \quad (1)$$

3. 合理的期待値の均衡解

- 市場の需要供給均衡条件から

$$p_t^* = -\frac{b}{d}p_t^e - \frac{1}{d}u_t \quad (2)$$

- 合理的期待仮説から

$$p_t^e = E[p_t^* | I_{t-1}] = -\frac{1}{b+d}E[u_t | I_{t-1}] \quad (3)$$

4. 白色雑音の性質：系列無相関

$$E[\varepsilon_{t-\theta} | I_{t-1}] = E[\varepsilon_{t-\theta} | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = \begin{cases} E[\varepsilon_{t-\theta}] = 0, & \theta < 1 \\ E[\varepsilon_{t-\theta} | \varepsilon_{t-\theta}] = \varepsilon_{t-\theta}, & \theta \geq 1 \end{cases}$$

5. 均衡価格および合理的期待の白色雑音による表現 $\{u_t\}$ の確率的な構造

$$u_t = \varepsilon_t + w_1\varepsilon_{t-1} + w_2\varepsilon_{t-2} + \dots$$

と (3) とから、 p_t^e は $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ の加重和であることが分かる。したがって (2) から、 p_t^e が $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ の加重和であることが分かる。そこで

$$p_t = W_0\varepsilon_t + W_1\varepsilon_{t-1} + W_2\varepsilon_{t-2} + \dots \quad (4)$$

と置くと、合理的期待の公式 (1) から、

$$p_t^e = E[p_t^* | I_{t-1}] = W_1\varepsilon_{t-1} + W_2\varepsilon_{t-2} + \dots \quad (5)$$

このようにして、 p_t^* と p_t^e の白色雑音による表現において、 ε_{t-1} 以降の係数は共通であることが示される。

過去の価格による表現

1. 未定乗数 V_1, V_2, V_3, \dots による表現

$$p_t^e = V_1 p_{t-1} + V_2 p_{t-2} + V_3 p_{t-3} + \dots$$

2. 白色雑音による価格の表現 (4) の代入

$$\begin{aligned} p_t^e &= V_1 (W_0 \varepsilon_{t-1} + W_1 \varepsilon_{t-2} + W_2 \varepsilon_{t-3} + \dots) \\ &\quad + V_2 (W_0 \varepsilon_{t-2} + W_1 \varepsilon_{t-3} + W_2 \varepsilon_{t-4} + \dots) \\ &\quad + V_3 (W_0 \varepsilon_{t-3} + W_1 \varepsilon_{t-4} + W_2 \varepsilon_{t-5} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

3. 白色雑音 $\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots\}$ の係数

$$\begin{aligned} p_t^e &= V_1 W_0 \varepsilon_{t-1} \\ &\quad + (V_1 W_1 + V_2 W_0) \varepsilon_{t-2} \\ &\quad + (V_1 W_2 + V_2 W_1 + V_3 W_0) \varepsilon_{t-3} + \dots \end{aligned}$$

4. 合理的期待に基づく価格予想値 (5) の係数との比較

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1 W_0 \\ W_2 &= V_1 W_1 + V_2 W_0 \\ W_3 &= V_1 W_2 + V_2 W_1 + V_3 W_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

5. 攪乱要因の影響が永続する場合： $w_1 = w_2 = w_3 = \dots = 1$ • 係数 $W_0, W_1, W_2, W_3, \dots$ の値

$$W_0 = \frac{1}{d}, \quad W_i = \frac{1}{b+d}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

• 未定乗数 V_1, V_2, V_3, \dots の決定

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{d}{b+d} = \frac{d}{b} \left(\frac{b}{b+d} \right) \\ V_2 &= \frac{d}{b+d} - \frac{d}{b+d} V_1 = \frac{d}{b+d} - \left(\frac{d}{b+d} \right)^2 = \frac{d}{b} \left(\frac{b}{b+d} \right)^2 \\ V_3 &= \frac{d}{b+d} - \frac{d}{b+d} V_1 - \frac{d}{b+d} V_2 = \frac{d}{b} \left(\frac{b}{b+d} \right)^3 \\ &\dots \\ V_i &= \frac{d}{b+d} - \frac{d}{b+d} V_1 - \frac{d}{b+d} V_2 - \dots - \frac{d}{b+d} V_{i-1} = \frac{d}{b} \left(\frac{b}{b+d} \right)^i \end{aligned}$$