多期間の問題

経済が潜在生産能力を有効に利用しつつ発展するためには，適度の速さで資本ストックの蓄積を進めていかなければならない．

I. 最適成長の理論 —— 離散時間型

A. モデル

1. 潜在生産能力
   a. 初期資本ストック　k_0
   b. 生産技術

$$y_t = f(k_{t-1})$$

$$y_t = c_t + z_t, \quad k_t = (1-\delta)k_{t-1} + z_t$$

2. 消費者の選好

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(k_T)$$

B. T 期間にわたる計画の問題：$\{c_1, c_2, \cdots, c_T\}$ および $\{k_1, k_2, \cdots, k_T\}$ の決定

$$\max \left[\sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(k_T) \right]$$

$$f(k_{t-1}) - c_t - k_t + (1-\delta)k_{t-1} = 0, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \quad k_0 \text{は歴史与件}$$

II. 最適成長の条件

A. 最初の 2 期間の問題：　c_1，c_2，k_1，k_2 の決定

$$u(c_1) + \beta u(c_2) + S_2(k_2)$$

$$f(k_0) - c_1 - k_1 + (1-\delta)k_0 = 0, \quad f(k_1) - c_2 - k_2 + (1-\delta)k_1 = 0$$

1. 終点の資本ストック k_2^* の水準を変えない場合
   a. 消費径路の変更にともなう効用の変化
   期間 1 の消費を a だけ増やしたときの期間 2 の消費の変化

$$f'(k_1^*)a + (1-\delta)a = [f'(k_1^*) + (1-\delta)]a$$

この変化によって生じる効用の変化

$$u'(c_1^*)a - \beta u'(c_2^*)[f'(k_1^*) + (1-\delta)]a$$

b. 最適条件

$$f'(k_1^*) + (1-\delta) = \frac{u'(c_1^*)}{\beta u'(c_2^*)}$$

$$\text{あるいは}\quad f'(k_1^*) - \delta = \frac{u'(c_1^*) - \beta u'(c_2^*)}{\beta u'(c_2^*)}$$

2. 終点の資本ストック k_2 の決定

a. 終点の資本ストックを b だけ増やしたときの効用の変化

$$-\beta u'(c_2^*)b + S_2'(k_2^*)b$$

b. 最適条件

$$\beta u'(c_2^*) = S_2'(k_2^*)$$

参考　ラグランジュの未定乗数法

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + S_2(k_2)$$

$$+\lambda_1[f(k_0) - c_1 - k_1 + (1-\delta)k_0] + \lambda_2[f(k_1) - c_2 - k_2 + (1-\delta)k_1]$$

$$u'(c_1) - \lambda_1 = 0, \quad \beta u'(c_2) - \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_2[f'(k_1) + 1 - \delta] - \lambda_1 = 0$$
$$S_2'(k_2) - \lambda_2 = 0$$
$$f(k_0) - c_1 - k_1 - (1-\delta)k_0 = 0, \quad f(k_1) - c_2 - k_2 - (1-\delta)k_1 = 0$$

B. 結果の一般化

1. オイラー方程式

$$f'(k_t) + (1-\delta) = \frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} \quad \text{あるいは} \quad f'(k_t) - \delta = \frac{u'(c_t) - \beta u'(c_{t+1})}{\beta u'(c_{t+1})}$$

2. 横断条件 transversality condition

$$\beta^T u'(c_T) = S'(k_T)$$

この条件は，k_T が負になってはならないことを考慮するとつぎのようになる．

$$S'(k_T) - \lambda_T \leq 0, \qquad [S'(k_T) - \lambda_T] \cdot k_T = 0$$

とくに，計画が期間 T で終結し，したがってどのような k_T に対しても $S(k_T) = 0$，$S'(k_T) = 0$ であるとき

$$\lambda_T \geq 0, \qquad \lambda_T \cdot k_T = 0$$

参考　ラグランジュの未定乗数法

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(k_T) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t [f(k_{t-1}) - c_t - k_t + (1-\delta)k_{t-1}]$$

$$\begin{aligned} &\beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0, && t = 1, 2, \ldots, T \\ &\lambda_{t+1}[f'(k_t) + 1 - \delta] - \lambda_t = 0, && t = 1, 2, \ldots, T-1 \\ &S'(k_T) - \lambda_T = 0 && \\ &k_t - (1-\delta)k_{t-1} = f(k_{t-1}) - c_t, && t = 1, 2, \ldots, T \end{aligned}$$

B. 累積効用と最終資本ストックの選択

T 期にわたる消費からの効用の総和を w とする．すなわち

$$w = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t)$$

である．図 3「累積効用と最終資本ストック」では，横軸に計画終了時の資本ストック k_T を，縦軸に期間 T までの消費からの効用の総和 w を測る．曲線 A は，初期において財のストックが k_0 であった経済が，T 期間のうちに達し得る k_T と w の組み合わせの最大限を表している．そして曲線 U は，計画の目的を定める効用関数 $w + S(k_T)$ を表す無差別曲線の一つである．最適貯蓄の問題は，曲線 A およびその左下方の領域に終点をもつ径路のうち最も高い無差別曲線上に終点をもつ径路を見つけることである．この範囲に終点のある径路のうち最も高い無差別曲線に達する径路の終点は曲線 A 上になければばならない．したがって最適径路の終点は，曲線 A と無差別曲線の接点 P によって示すことが出来る．

III. 多期間問題の標準形 —— 連続時間型

A. 問題

$$\max_{\{v\}} \int_0^T \beta(t) u[x(t), v(t), t] dt + S[x(T)]$$

$$\dot{x} = f[x(t), v(t), t]$$

x：状態変数，v：制御変数

B. 最適解

1. ハミルトン関数

$$H = \beta(t) u[x(t), v(t), t] + \lambda f[x(t), v(t), t]$$

2. 最適化の必要条件

$$H_v[x(t), v(t), \lambda(t), t] = 0$$

$$\dot{\lambda} = -H_x[x(t), v(t), \lambda, t]$$

$$\lambda(T) = S'[x(T)]$$

IV. ラムゼイの理論

A. 問題の設定

1. ラムゼイの問題設定の特徴
   a. 将来の効用を割り引かない.
   b. 効用には上限，すなわち至福点 bliss があるものとする.
2. 問題

$$\min_{\{c\},\{k\}} \int_0^\infty [B - u(c)]\,dt$$

$$\dot{k} = f(k) - c$$

B. 最適化の条件

1. 問題の変換

$$\int_0^\infty [B - u(c)]\,dt = \int_0^\infty \frac{B - u(c)}{\dot{k}} dk = \int_0^\infty \frac{B - u(c)}{f(k) - c} dk$$

$$\min_c \left[\frac{B - u(c)}{f(k) - c}\right], \qquad k \text{ は所与}$$

2. 最適条件

$$-[B - u(c)] + u'(c)\dot{k} = 0$$

$$\dot{k} = \frac{B - u(c)}{u'(c)}$$

ラムゼイは，この条件をケインズが示唆したという．ラムゼイが紹介するケインズの簡単な推論とはつぎのようなものである．経済が一つの蓄積径路上，ある段階で，１期間当り c の率で消費をし z の率で蓄積をしているとしよう．その段階で，いま，消費を１期間当り Δc だけ増やすと，現在の効用は $u'(c)\Delta c$ だけ増える．一方，至福点に達するのが約 $\Delta c/z$ 期間遅れる．なぜなら，消費を増やしたために，１期間当りの蓄積は Δc だけ減るからである．それを補うのに要する時間は $\Delta c/z$ である．

実際，１期間当たりの消費を増やしたのちに z の蓄積をするのに要する時間を h とすると $(z - \Delta c)h = z$ であるから $h = z/(z - \Delta c)$ である．したがって至福点へ到達までの遅延は，z に比べて Δc が小さいとき

$$h - 1 = \frac{\Delta c}{z - \Delta c} \approx \frac{\Delta c}{z}$$

この段階で至福点との効用差は $B - u(c)$ であるから，遅延によって将来見込まれる効用の損失は

$$\frac{B - u(c)}{z} \cdot \Delta c$$

である．もし経済が最適蓄積径路上にあるならば，この変更による現在効用の増加と将来効用の減少は等しくなっていなければならない．したがってつぎの最適条件を得る．

$$u'(c) = \frac{B - u(c)}{z}$$

参考文献

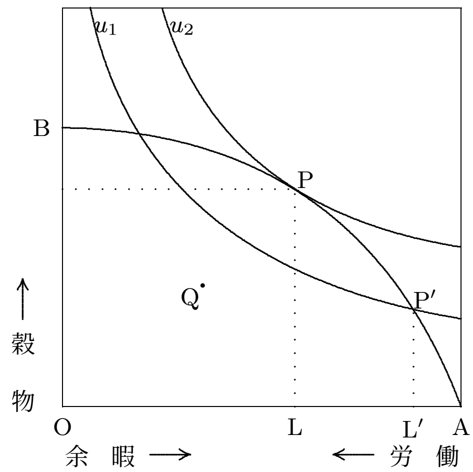
Olivier J. Blanchard and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Chapter 2.

Kenneth J. Arrow and Mordecai Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return and Optimal Fiscal Policy.* Baltimore: Johns Hopkins Press.

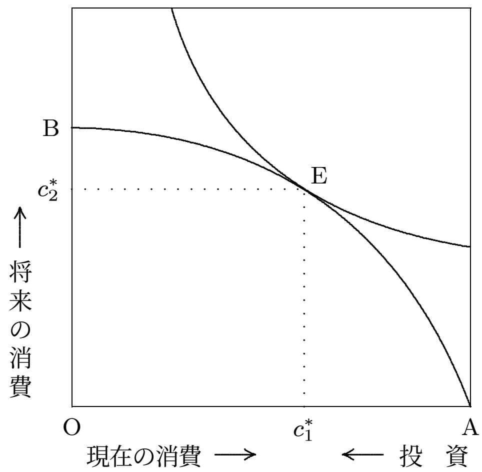
Frank P. Ramsey (1928) "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal* 38: 543–549.

鬼木　　甫（1980）「数理経済学 II」『経済学大辞典 III』東京：東洋経済新報社

1. 余暇と労働



2. 消費と投資



3. 累積効用と最終資本ストック