家計の貯蓄と資産選択

1　不確実性がない場合

$\{c_t\}$，$\{l_t\}$ を，それぞれ消費，労働の時間径路，a_T を計画期間後に残る資産額とすると，T 期間にわたる効用最大化の目的関数は，一般に次のように書かれる．

$$u(c_0, c_1, \cdots, c_{T-1}; l_0, l_1, \cdots, l_{T-1}) + v(a_T)$$

u は効用関数，v は残存資産の評価関数である．ラムゼイ (1928) をはじめとする動的計画の問題で効用関数は，次のような，各期の効用関数の和の形に特定化される．

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{u(c_t, l_t)}{(1+\rho)^t} + v(a_T) \tag{1}$$

ここで ρ は，心理的割引率である．他方，消費と資産蓄積は，労働からの所得と資産の制約に服するので，各期の資産増殖は次のように定まる．

$$\Delta a_t = r_t a_{t-1} + (1+r_t)(w_{t-1} l_{t-1} - c_{t-1}), \quad t = 1, \cdots, T \tag{2}$$

ここで r_t と w_t は，t 期の利子利と賃金率である．(2) の制約の下に (1) を最大化する消費と労働の時間径路，$\{c_t\}$ と $\{l_t\}$ を求めることが消費の動的計画の問題である．

いま，$r_t = r, \quad t = 1, 2, \ldots, T$ とすると，T 個の制約条件 (2) は 1 個の制約条件

$$a_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \frac{w_t l_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{a_T}{(1+r)^T} \tag{3}$$

に要約できる．

ラグランジュの未定乗数を λ とすると，最適解の必要条件は

$$\frac{u_c(c_t, l_t)}{(1+\rho)^t} - \frac{\lambda}{(1+r)^t} = 0, \quad t = 0, 1, \cdots, T-1 \tag{4}$$

$$\frac{u_l(c_t, l_t)}{(1+\rho)^t} + \frac{w_t \lambda}{(1+r)^t} = 0, \quad t = 0, 1, \cdots, T-1 \tag{5}$$

$$v'(a_T) - \frac{\lambda}{(1+r)^T} = 0 \tag{6}$$

のようになる．選好の凸性，または限界代替率逓減などの条件を前提とすれば，最適化の必要条件を満たす消費計画が効用を最大化する消費計画になる．[1]

経済理論の面から解釈を与え易い条件が，これらの必要条件から導き出される．まず同時点の消費と労働については，次の条件が成り立つ．

$$-\frac{u_l(c_t, l_t)}{u_c(c_t, l_t)} = w_t \tag{7}$$

[1] 以下では，たとえば限界代替率逓減の法則を前提として，最適化の必要条件を満たす消費計画は効用を最大化する消費計画であるものとして話しを進める．

これは，余暇と消費の限界代替率と実質賃金率の均等条件である．賃金率は余暇消費の機会費用であるから，この条件は，消費の限界代替率と相対価格の均等条件の一つにほかならない．この条件を，最適化の同時条件とよぶ．

つぎに，1単位期間を隔てた消費については,

$$\frac{u_c(c_t,l_t)}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=\frac{1+\rho}{1+r} \tag{8}$$

これは,

$$\frac{1}{1+\rho}\frac{u_c(c_t,l_t)}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=\frac{1}{1+r}$$

のように書きなおされる．左辺は1単位期間を隔てる消費の限界代替率であり，右辺は1単位期間の割引因子，あるいは，1単位期間を隔てる消費の交換比率である．したがってこの最適条件も，消費の限界代替率と相対価格の均等条件にほかならない．この条件を，最適化の通時条件とよぶ.

心理的割引率と利子率が時間を通じて変化する場合，通時条件は

$$\frac{u_c(c_t,l_t)}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=\frac{1+\rho_t}{1+r_t} \tag{9}$$

となることは明かである.

(7)，(9) から，1単位期間を隔てる労働について

$$\frac{u_l(c_t,l_t)}{u_l(c_{t-1},l_{t-1})}=\frac{(1+\rho_t)w_t}{(1+r_t)w_{t-1}}$$

また多期間を隔てる消費について

$$\frac{u_c(c_t,l_t)}{u_c(c_{t-\theta},l_{t-\theta})}=\prod_{i=t-\theta}^{t}\frac{1+\rho_t}{1+r_i}$$

が成り立つことが容易に分かる.

2　不確実性がある場合

2.1　ベルマン方程式

不確実性下の消費需要を考える準備として，前節の問題を動的計画法の見方から考えなおして見よう.

目的関数を最大化する変数の時間径路を定める動的計画の問題は，計画期間の最終時点から時間を逆に遡って解かれることが知られている．したがって多期間問題の解は，2期間問題を逐次解くことによって得られる．たとえば時点0から時点Tにわたる問題において，計画期間中の時点$t+1$を初期時点とする問題が解かれていれば，時点tを初期時点とする問題は2期間問題に還元される．このように考えると，多期間問題の解の必要条件は，基本的に，2期間問題の解の必要条件によって示されることが分かる.

前節の問題についてこのことを見ると以下のようになる．いま，初期時点を$t+1$とし，その時点の資産額を仮にxとおいて解いた$\{c\}$，$\{l\}$，a_Tの解を$\{c_{t+1}(x),c_{t+2}(x),\cdots,c_{T-1}(x)\}$，$\{l_{t+1}(x),l_{t+2}(x),\cdots,l_{T-1}(x)\}$，$a_T(x)$，目的関数の最大値を$V(x,t+1)$とすると

$$V(x,t+1)=\sum_{k=t+1}^{T-1}\beta_k u[c_k(x),l_k(x)]+v[a_T(x)],\quad \beta_k=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+\rho_i} \tag{10}$$

そのとき，初期時点ををtとしその時点の資産額をxとする最適化問題は，

$$\beta_t u(c_t, l_t) + V(a_{t+1}, t+1) \tag{11}$$

をc_t，l_t，a_{t+1}に関して制約条件

$$(1 + r_{t+1})(x + w_t l_t - c_t) = a_{t+1} \tag{12}$$

の下で最大化する問題となる．この2期関問題の解を$c_t(x)$，$l_t(x)$，$a_{t+1}(x)$とすると

$$V(x, t) = \beta_t u[c_t(x), l_t(x)] + V[a_{t+1}(x), t] \tag{13}$$

である．$V(x, t)$を，時点tの評価関数（return function）という．このようにして，評価関数をつぎつぎに作り，本来の初期時点に戻るまで2期間問題を繰り返し解いて行けばよい．なお，

$$V(x, T) = v(x)$$

であり，これは最大化問題を解かずに定まることに注意せよ．

ここで，$W(x, t)$を

$$W(x, t) = \frac{V(x, t)}{\beta_t} \tag{14}$$

と定義すると，目的関数(11)は次のように書き換えられる．

$$u(c_t, l_t) + \frac{W(a_{t+1}, t+1)}{1 + \rho_{t+1}} \tag{15}$$

$W(x, t)$をt時点の当期価値評価関数（current value return function）という．

制約条件(12)の下で目的関数(15)の値を最大化する問題の解の必要条件は次の通りである．

$$u_c(c_t, l_t) - (1 + r_{t+1})\lambda_t = 0 \tag{16}$$

$$u_l(c_t, l_t) + (1 + r_{t+1}) w_t \lambda_t = 0 \tag{17}$$

$$\frac{W_a(a_{t+1}, t+1)}{1 + \rho_{t+1}} - \lambda_t = 0 \tag{18}$$

これらの条件から，さきに得た最適化の同時条件(7)が導かれることは明かである．通時条件(9)については，それほど明かではないが，包絡線定理により(16)，(18)からやはり導かれる．[2]

2.2　消費と資産選択の理論

以上の結果を利用して，不確実性下の家計の貯蓄と資産選択の問題を考えよう．ここでは，説明を簡単にするために，労働供給決定の問題は無視する．家計が保有できる資産は一つの無危険資産と一つの危険資産のみとし，無危険資産の収益率をr，危険資産の収益率をzとする．そこで，家計の危険資産保有比率をaとすると，資産全体からの期待収益率は

$$(1 + r)(1 - a) + (1 + z)a = (1 + r) + (z - r)h$$

となる．したがって期間tの家計の所得制約条件はつぎのようになる．

$$a_{t+1} = [(1 + r_t) + (z_t - r_t)h_t](a_t + y_t - c_t)$$

ここでzは不確定である．

---

[2] このことについては，付録を見よ．

家計の最適化問題　多時点にわたる家計の効用

$$E\left[\sum_{t=0}^{T-1} \alpha_t u(c_t) + S(a_T)\right]$$

を制約条件

$$x_{t+1} = [(1+r_t) + (z_t - r_t)h_t](a_t + y_t - c_t)$$
$$t = 0, 1, 2, \cdots, T-1$$

および初期条件 a_0 の下で最大化するように，資産額，資産構成，消費の時間径路 $\{a_t\}$，$\{h_t\}$，$\{c_t\}$ を定める．ここで $\{\alpha_t\}, \{y_t\}$ は所与とする．

2期間問題への還元　この問題は，ベルマン方程式を使うとつぎの2期間問題に分解することができる：

y_t および初期条件 $a_t = x$ を所与として，関数

$$u(c_t) + \beta_{t+1} E[W(a_{t+1}, t+1)]$$

の値を制約条件

$$a_{t+1} = [(1+r_t) + (z_t - r_t)h_t](x + y_t - c_t)$$

の下で最大にする資産額，資産構成，消費の時間径路 a_{t+1}, h_t，c_t を定めること．

最適化の必要条件　この問題の解の必要条件はつぎのとおりである．

$$E[W_x(a_{t+1}, t+1) g_h(x, y_t, c_t, h_t, t)] = 0$$
$$u_c(c_t) + \beta_{t+1} E[W_x(a_{t+1}, t+1) g_c(x, y_t, c_t, h_t, t)] = 0$$
$$W_x(x, t) = \beta_{t+1} E[W_x(a_{t+1}, t+1) g_x(x, y_t, c_t, h_t, t)]$$

ここで

$$g_a(x, y_t, c_t, h_t, t) = (z_t - r_t)[x + y_t - c_t]$$
$$-g_c(x, y_t, c_t, h_t, t) = g_x(x, y_t, c_t, t) = (1+r_t) + (z_t - r_t)h_t$$

である．したがって必要条件はつぎのようになる.[3]

$$E[W_x(x_{t+1}, t+1)(z_t - r_t)] = 0$$
$$u_c(c_t) - \beta_{t+1} E[W_x(x_{t+1}, t+1)((1+r_t) + (z_t - r_t)h_t)] = 0$$
$$W_x(x, t) = \beta_{t+1} E[W_x(x_{t+1}, t+1)((1+r_t) + (z_t - r_t)h_t)]$$

最後の二つの等式から

$$W_x(x, t) = u_c(c_t)$$

[3] ここでは $x + y_t - c_t \neq 0$ であることを前提としている．

同様の関係がすべての t について成り立つから

$$W_x(x_{t+1}, t+1) = u_c(c_{t+1})$$

この関係を最適化の必要条件に代入して変形すると

$$E[(z_t - r_t)u_c(c_{t+1})] = 0$$
$$u_c(c_t) - (1+r_t)\beta_t E[u_c(c_{t+1})] - a_t\beta_t E[(z_t - r_t)u_c(c_{t+1})] = 0$$

結局つぎの条件を得る.

(i) $$E[(1+z_t)u_c(c_{t+1})] = E[(1+r_t)u_c(c_{t+1})]$$

(ii) $$\frac{u_c(c_t)}{\beta_t E[u_c(c_{t+1})]} = 1 + r_t$$

参考文献

Olivier J. Blanchard and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Chapter 6.

Paul A. Samuelson (1969) "Life Time Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming." *Review of Economics and Statistics* 51: 239–246.

Kenneth J. Arrow and Mordecai Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return and Optimal Fiscal Policy.* Baltimore: Johns Hopkins Press. Chapter II.

Richard Bellman (1957) *Dynamic Programming.* Princeton: Princeton University Press. Chapter III.

Milton Friedman (1957) *A Theory of the Consumption Function.* Princeton: Princeton University Press. Chapters I and II.

Robert E. Hall (1978) "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence." *Journal of Political Economy* 86: 971–987.

Robert Clower (1965) "The Keynesian Counter-revolution: A Theoretical Appraisal." In *The Theory of Interest Rates: Proceedings of a Conference on the Theory of Interest and Money, held by the International Economic Association at Raymont, France, 1962*, edited by F. H. Hahn and F. P. R. Brechling. London: Macmillan.

付録1：ポンジ・ゲームの禁止

各期ごとの消費を制約する条件 (2) をつなぎ合わせて得た等式 (3) は，計画期間末の資産額 a_T の大きさを束縛していないため，実は家計の消費を制約する条件になっていない．多期間にわたる家計の効用最大化問題で，計画期末の資産の効用評価 $v(a_T)$ を考慮するのはそのためである．

無限期間にわたる効用最大化問題では，$v(a_T)$ を定義することができないので，(2)，(3) に加えて別の制約条件を課する必要がある．その一つは，つぎのような条件である．

$$a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t l_t}{(1+r)^t} \geq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r)^t}$$

これはつぎの条件と同じである．

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_T}{(1+r)^T} \geq 0$$

これをポンジ・ゲーム禁止条件 no-Ponzi-game condition という．この条件は，家計が際限なく借入をし，その返済を際限なく先に延ばすことを禁止している．

付録2：包絡線定理とその応用

包絡線定理　x と y の関数 $z=f(x,y)$ が与えられたとき，x を固定して y について z を最大化した z の最大値を $z^*=\phi(x)$，z を最大化する y の値を $y^*=\psi(x)$ とする．そのとき，

$$\frac{dz^*}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y^*) \tag{A2. 1}$$

である．

証明　$z^*=\phi(x)=f[x,\psi(x)]$ であるから，

$$\frac{dz^*}{dx}=f_x(x,y^*)+f_y(x,y^*)\psi'(x)$$

一方，y^* はx を固定してz を最大化するy の値であるから，$f_y(x,y^*)=0$ である．ゆえに(A2. 1) が成り立つ．

　この定理は，x を動かし，同時に z を最大化するように y を動かしたときの z のグラフが，y をさまざまに固定して x のみを動かしたときの z のグラフの包絡線になることを示している．

通時条件　多時点にわたる効用最大化の通時条件(9) が2期間問題の解の必要条件から導かれることは，当期価値評価関数に包絡線定理を適用することを通して，以下のようにして示される．まず当期価値評価関数 $W(x,t)$ は，x を任意に固定し

$$u(c_t,l_t)+\frac{W[a_{t+1}(x),t+1]}{1+\rho_{t+1}}$$

を制約条件(12) の下で最大化して得られる x の関数であるから，包絡線定理を適用して

$$W_a(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{W[a_{t+1}(x),t+1]}{1+\rho_{t+1}}=\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho_{t+1}}W_a[a_{t+1}(x),t+1] \tag{A2. 2}$$

である．次に(16)，(18) より

$$u_c[c_t,l_t]=\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho_{t+1}}W_a[a_{t+1}(x),t+1] \tag{A2. 3}$$

そして(A2. 2) と(A2. 3) とから

$$u_c[c_t,l_t]=W_a(x,t)$$

同様の関係がすべての t について成り立つから，

$$u_c[c_{t+1},l_{t+1}]=W_a(x,t+1) \tag{A2. 4}$$

(A2. 3) と(A2. 4) とから

$$\frac{u_c(c_{t+1},l_{t+1})}{u_c(c_t,l_t)}=\frac{1+\rho_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

同様の関係がすべての t について成り立つことから，(9) が導かれる．

付録3：消費の代替の弾力性と限界効用の弾力性の関係

2時点の消費 c_s と c_t の効用関数について，c_s と c_t の代替の弾力性はつぎのように定義される．

$$\sigma = \frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \frac{d[c_s/c_t]}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}$$

右辺の第2項の微分を計算するためには，その逆数

$$\left\{ \frac{d[c_s/c_t]}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} \right\}^{-1} = \frac{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}{d[c_s/c_t]}$$

を考えるのが分かりやすい．任意に固定した c_t に対して，$c_s/c_t = x$，したがって $c_s = c_t x$ とおいてこの微分計算をすると

$$\frac{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}{d[c_s/c_t]} = \frac{d[u'(c_t x)/u'(c_t)]}{dx} = \frac{u''(c_t x) c_t}{u'(c_t)}$$

したがって σ の定義式の第2項は

$$\frac{d[c_s/c_t]}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]} = \frac{u'(c_t)}{u''(c_t x) c_t}$$

となる．これを定義式に代入して

$$\sigma = \frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \frac{u'(c_t)}{u''(c_t x) c_t} = \frac{u'(c_s)}{u''(c_s) c_s}$$

要するに，c_t を任意に固定したときの c_s と c_t の代替の弾力性は，c_s における限界効用の弾力性 $\eta_s = -c_s u''(c_s)/u'(c_s)$ の逆数に負号を付けたものとなる．

以上の結果から，s が t に近づくときの σ の極限値は，c_t における限界効用の弾力性 $\eta_t = -c_t u''(c_t)/u'(c_t)$ の逆数に負号を付けたものとなることが分かる．

$$\lim_{s \to t} \sigma = \lim_{s \to t} \frac{u'(c_s)}{u''(c_s) c_s} = \frac{u'(c_t)}{u''(c_t) c_t} = -\frac{1}{\eta_t}$$

注　意

1. c_s と c_t の代替の弾力性が c_t には依存せず c_s の値のみによって定まるのは，時間分離型の効用関数

   $$\sum_\tau \beta(\tau) u[c(\tau)] \quad \text{あるいは} \quad \int \beta(\tau) u[c(\tau)] d\tau$$

   を考えているからである．ここで $\beta(\tau)$ は心理的割引率である．

2. 代替の弾力性の定義においては，心理的割引率 $\beta(\tau)$ が，分母と分子でたがいに相殺されている．

$$\sigma = \frac{\beta(s)u'(c_s)/\beta(t)u'(c_t)}{c_s/c_t} \frac{d[c_s/c_t]}{d[\beta(s)u'(c_s)/\beta(t)u'(c_t)]} = \frac{u'(c_s)/u'(c_t)}{c_s/c_t} \frac{d[c_s/c_t]}{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}$$

付録4：消費の時系列

ロバート・ホール（1978）は，時差選好率，利子率，労働が時間を通じて一定であり，限界効用の消費に関する弾力性が一定であるとき，消費額の大きさは前期の消費額で説明し尽くされることを示した．

実際，時差選好率および利子率が時間を通じて一定であるとき，効用最大化の必要条件から

$$\frac{E[u_c(c_t,l_t)]}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=\mathrm{const}$$

である．そのとき

$$\frac{E[\Delta u_c(c_t,l_t)]}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=\frac{E[u_c(c_t,l_t)-u_c(c_{t-1},l_{t-1})]}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=0$$

近似計算により

$$\Delta u_c(c_t,l_t)=u_{cc}(c_{t-1},l_{t-1})\Delta c_t+u_{cl}(c_{t-1},l_{t-1})\Delta l_t$$

であるから

$$\frac{E[\Delta u_c(c_t,l_t)]}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}=\frac{E[\zeta\Delta c_t]}{c_{t-1}}+\frac{E[\lambda\Delta l_t]}{l_{t-1}}$$

したがって

$$\frac{E[\zeta\Delta c_t]}{c_{t-1}}+\frac{E[\lambda\Delta l_t]}{l_{t-1}}=0$$

ここで

$$\zeta=\frac{c_{t-1}u_{cc}(c_{t-1},l_{t-1})}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})},\quad \lambda=\frac{l_{t-1}u_{cl}(c_{t-1},l_{t-1})}{u_c(c_{t-1},l_{t-1})}$$

つまり，それぞれ消費および労働に関する限界効用の弾力性である．ζ，λ が一定であるとき，

$$\frac{\zeta E[\Delta c_t]}{c_{t-1}}+\frac{\lambda E[\Delta l_t]}{l_{t-1}}=0$$

とくに労働量が時間の経過を通して変化しないとき，

$$\frac{E[\Delta c_t]}{c_{t-1}}=0$$

したがって $\{c_t\}$ についてつぎの関係が成立する．

$$E[c_t|I_{t-1}]=c_{t-1}$$

ここで I_{t-1} は期間 $t-1$ までに得られた情報を表す．