経済時系列の分析

戦後日本の経済変動の観察を通じて，GDP の変動には，トレンドを中心とした波動があることが分かった．その波動の振幅は，時間の経過を通じて拡大する様子もなく，縮小する様子もない．このような波動を定常波，あるいは定常過程という．直接に観察できる経済時系列の変動は，たとえば GDP の変動が示すように，この意味での定常波ではないものもある．しかしそれをさまざまに加工して定常波をつくることができる．現代マクロ経済学は，こうした工夫によって経済時系列の特徴を記述し，経済構造を推測して，それを予測と政策立案に役立てようとしている．

1　単純な関数の当てはめ

最も分かり易いのは，観察値に適合するように，トレンドの形を簡単な時間の関数，例えば線形関数，２次関数などに特定する方法である．GDP の観察値を Y，時間を t として例示すると

$$Y_t = a + bt + u_t$$

$$Y_t = a + bt + ct^2 + u_t$$

のようになる．トレンドからの乖離 u_t の動きが定常波になるように，試行錯誤を通じてトレンドを表す関数を選ぶのである．GDP などマクロ経済学が扱う経済変数には，それを対数化すると時間の線形関数がよく当てはまる．数式で示せばつぎのようになる．

$$\log Y_t = a + bt + u_t$$

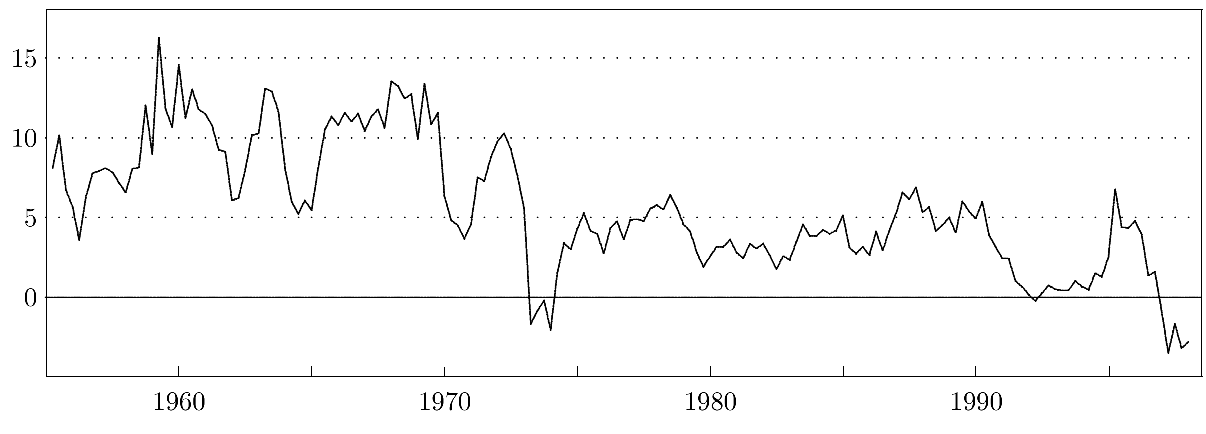
t の係数 b は Y の成長率を表す．実際，$(dY/dt)/Y = b$ である．

2　差分をとる方法

経済時系列の波動を調べるために，時間変化率の変動を見る方法がある．このように，時間とともに増大する時系列の波動を調べるためにその増加率の変動を見るという方法は，決して新しい方法ではないが，この考え方をマクロ経済分析に取り入れ，その含みを明らかにしたのはネルソンとプロッサーの 1982 年の論文である．

日本の GDP について，その成長率の変動を見ると図のようになる．

実質 GDP の成長率（%）1990 年価格，四半期データ，1995 — 1998



成長率の変動は高成長期，低成長期，停滞期のそれぞれで，ほぼ定常波であるように見える．GDP の対前年比の動きを見るということは，GDP の対数の差分の動きを見るのと同じことである．実際，GDP を Y として $y_t = \log Y_t$ とすると

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \log \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$$

したがって Y_t/Y_{t-1} あるいは $(Y_t - Y_{t-1})/Y_{t-1}$ が定常波であるとき $\{\Delta y_t\}$ は定常波となる．

3　趨勢定常と差分定常

3.1　ネルソン，プロッサーの分析

トレンドをもつ経済時系列についての２つの見方を比較しよう．一つは第１節のように，トレンドを，たとえば $a + bt$ のように予め定められた t の関数とし，$\{y_t\}$ からそのトレンドを除いた残りが定常波であるという見方である．つまり，y_t を

$$\text{(TS)} \qquad y_t = a + bt + u_t$$

のように分解したとき，$\{u_t\}$ が定常波であるという見方である．$\{y_t\}$ がそのような系列であるとき，$\{y_t\}$ は趨勢定常 trend stationary であるという．もう一つは，第２節のように，y_t の差分が定常波であるという見方である．つまり

$$\text{(DS)} \qquad y_t - y_{t-1} = b + u_t$$

とするとき，$\{u_t\}$ が定常波であるという見方である．$\{y_t\}$ の差分が定常波であるとき，$\{y_t\}$ は差分定常 difference stationary であるという．

トレンドをもつ経済時系列を趨勢定常と見るか差分定常と見るかの違いは，経済時系列そのものの変動に関して，著しく異なる含みをもつ．実際，(DS) の式を書きなおすとつぎのようになる．

$$y_t = y_0 + bt + \sum_{i=0}^{t-1} u_{t-i}$$

これを (TS) の式と比較すると，(TS) ではトレンド線 $a + bt$ からの乖離部分が定常波であるのに対して，(DS) ではトレンド線 $y_0 + bt$ からの乖離部分が定常波の累積になっていて，その分散は時間が経つにしたがって際限なく大きくなって行く．つまり $\{y_t\}$ の変動は，(TS) ならばトレンド線につねに戻る動きであるのに対して，(DS) ならば，必ずしもトレンド線に戻らない．

いま，定常波 $\{u_t\}$ が白色雑音（white noise）と呼ばれる外生ショック

$$\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \cdots$$

によって

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \epsilon_t, \quad 0 < \alpha < 1$$

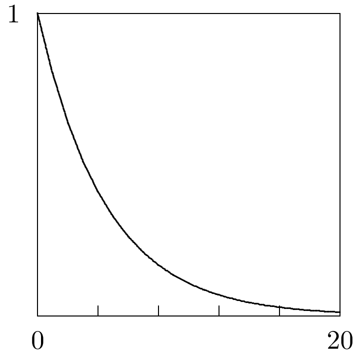
のように派生するものとしよう．$\{u_t\}$ がこのような関係をもつとき，$\{u_t\}$ は１階の自己回帰過程といい，AR(1) と書く．そのとき u_t は過去の外生ショックの加重和として

$$u_t = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1} + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \cdots + \alpha^{t-1}\epsilon_1 + \cdots$$

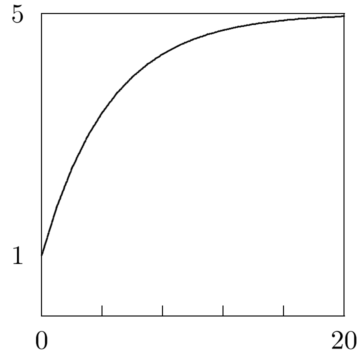
のように表される．ϵ_{t-i} の係数は，i 期前のショックが u_t に与える影響の大きさを表す．これをインパルス ϵ_{t-i} に対する u_t の応答 response という．$\{u_t\}$ が AR(1) であるとき，ϵ_{t-i} に対する u_t の応答は α^i になる．とくに期間１のインパルス ϵ_1 に対する u_t の応答は α^{t-1} である．$\lim_{t\to\infty} \alpha^t = 0$ であることから，期間１のインパルス ϵ_1 の影響は時間の経過とともに次第に小さくなって行くことが分かる．

$\{u_t\}$ が AR(1) であるとき，(TS）と（DS）の相違を，外生ショック $\{\epsilon_t\}$ が元の時系列 $\{y_t\}$ に及ぼす影響の面から見てみよう．$\{y_t\}$ が (TS) であるときは，トレンドからの乖離部分の動きが $\{u_t\}$ のような定常波であることから，$\{y_t\}$ をトレンドから外らせようとする外生ショックの影響が時間の経過とともの次第に小さくなって行くことが分かる．

トレンドからの乖離の応答 (TS)，$\alpha = 0.8$



トレンドからの乖離の応答 (DS)，$\alpha = 0.8$



$\{y_t\}$ が (DS) であるときは，トレンドからの乖離部分は u_t の累積 $\sum_{i=0}^{t-1} u_{t-i}$ になる．$\{u_t\}$ が AR(1) である場合について $\{y_t\}$ の変動を $\{\epsilon_t\}$ を用いて表すと

$$y_t = (1-\alpha)b + (1+\alpha)y_{t-1} - \alpha y_{t-2} + \epsilon_t$$

あるいは

$$y_t - (y_0 + bt) = \epsilon_t + \left(\sum_{k=0}^{1} \alpha^k\right)\epsilon_{t-1} + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{t-i} \alpha^k\right)\epsilon_i + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k\right)\epsilon_1 + \cdots$$

のようになる．したがってトレンドからの乖離 $y_t - (y_0 + bt)$ の期間１のインパルス ϵ_1 に対する応答は

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{t-1} = \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}$$

そして

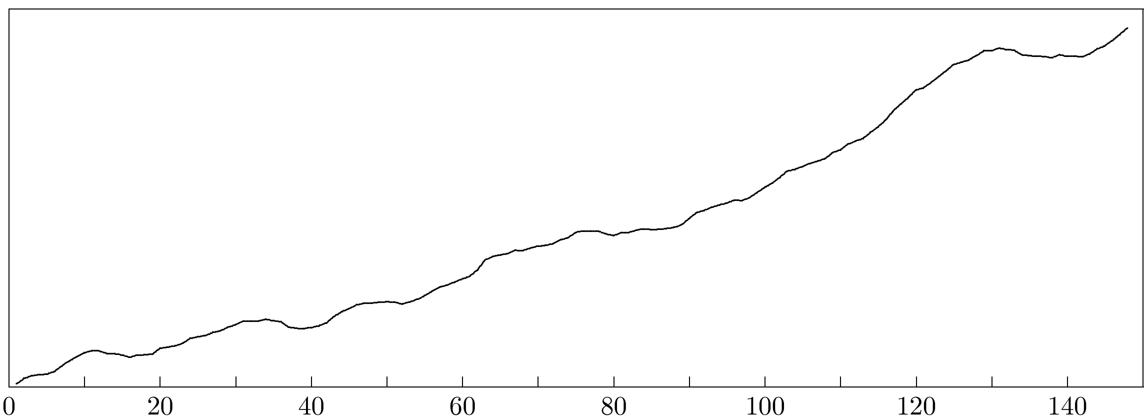
$$\lim_{t=\infty} \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

であることから，その影響はゼロに収束しないことが分かる．いま考えている (DS) の例

$$y_t - y_{t-1} = u_t, \quad u_t = au_{t-1} + \epsilon_t$$

で，$\alpha = 0.8$，$b = 3$ として $\{y_t\}$ の変動を描くとつぎの図のようになる．

y_t の変動 (DS)



経済の体系外から経済に加わるショックのうち，経済変数の応答が時間の経過とともにゼロに収束し影響が消滅して行くものを一時的ショック transitory shock，応答がゼロに収束せず，影響が永続して残存するものを永続的ショック permanent shock という．トレンドをもつ経済時系列を (TS) と見ると外生ショックは一時的であることになり，(DS) と見ると永続的であることになる．ネルソン＝プロッサーは，アメリカ合衆国の 1860 年から 1970 年にわたるデータを用いて，GNP の変動が (DS) であるという仮説を棄却できないという結果を得た．

3.2　ブランチャード，クワの展開

ブランチャード＝クワは，GNP と失業率の２変数と２つの外生ショックのある確率モデルをつくり，1950 年から 1987 年にわたるアメリカ合衆国の経済変動を分析した．その結果は *Lectures*, 第１章に要約されている．このモデルでは，１つの外生ショックは GNP と失業率の両方に一時的影響を与え，もう１つの外生ショックは GNP に永続的影響，失業率に一時的影響を与える．ブランチャード＝クワは前者を需要ショック，後者を供給ショックと呼ぶ．この研究では，オークンに従い，失業率はもっぱら一時的な要因で変動することを前提としている．

参考文献

Olivier J. Blanchard and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Chapter 1.

Charles Nelson and Charles Plosser (1982) “’Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series.” *Journal of Monetary Economics* 10: 139–162.

Olivier J. Blanchard and Danny Quah (1989) “The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Shocks.” *American Economic Review* 79: 635–673.

Ragnar Frisch (1933) “Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics.” In *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel.* London: Allen and Unwin.

脇田　成（1998）『マクロ経済学のパースペクティブ』日本経済新聞社.

付　録：定常波と白色雑音

定常波 stationary process　経済学では，普通，第２次定常性といわれるつぎの性質を持つ系列 $\{y_t\}$ を定常波という．

$$\text{第２次定常：}\quad \mathrm{E}[y_t]=\mu,\quad \mathrm{E}[(y_t-\mu)^2]=\sigma^2,\quad \mathrm{E}[(y_t-\mu)(y_{t-k}-\mu)]=\gamma_k$$

これは，大まかにいえば，一定水準のまわりを，時間を通じて同じように振動する波である．$\{y_t\}$ が定常波であるとき，$x_t=y_t-\mathrm{E}[y_t]$ として系列 $\{x_t\}$ をつくると，これは波動の中心がゼロの定常波になる．中心がゼロである波動の方が取り扱いが簡単であるので，普通は，$\{y_t\}$ をこのように $\{x_t\}$ に加工して分析を進める．

定常性は，厳密には，確率分布が時間の経過に対して不変であるという性質である．いま確率分布関数を F とするとき，この性質はつぎのように書かれる．

$$\text{厳密定常：}\quad F(y_{t_1},y_{t_2},\ldots,y_{t_n})=F(y_{t_1+h},y_{t_2+h},\ldots,y_{t_n+h})$$

第２次定常の概念は，確立分布を，第２次までの積率を用いて識別しているということになる．

白色雑音 white noise　平均がゼロで自己相関をもたない定常波 $(\epsilon_t,\epsilon_{t-1},\epsilon_{t-2},\cdots)$ を白色雑音という．記号で示せば，

$$\mathrm{E}(\epsilon_t)=0,\quad \mathrm{E}(\epsilon_t^2)<\infty,\quad r(\epsilon_t,\epsilon_{t'})=0$$

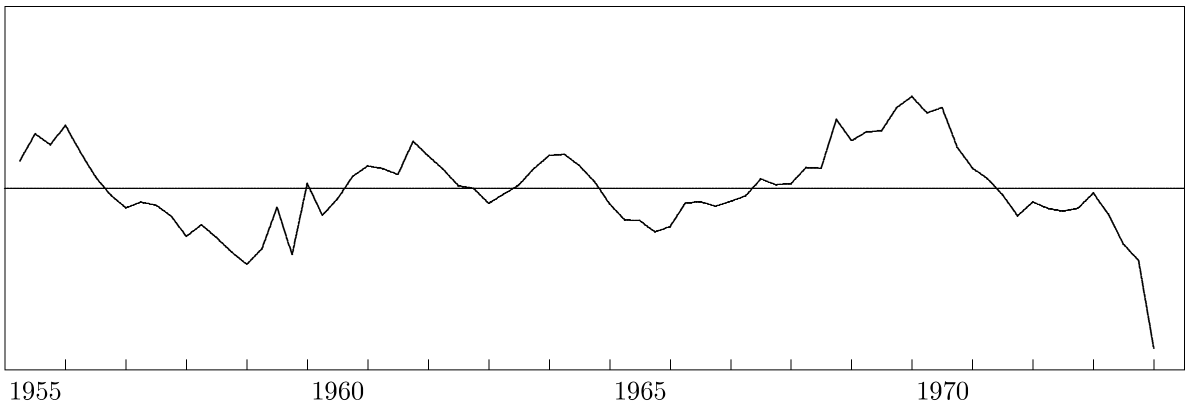
これが白色雑音の最も基本的な性質である．分析によっては，これに一様分散の条件

$$\mathrm{E}(\epsilon_t^2)=\sigma^2$$

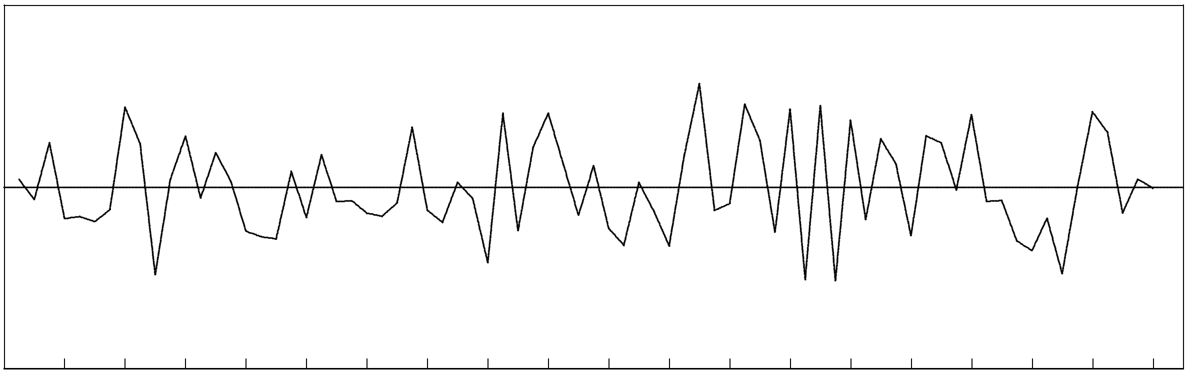
さらに分布の独立性，同一性の条件を加えることがある．

経済時系列　経済時系列のほとんどに自己相関がある．そのことは，たとえば GDP の変動からトレンドを除いた残余の変動を，白色雑音の動きと比較すれば容易に分かる．

GDP の波動



白色雑音



参考文献

David F. Hendry (1995) *Dynamic Econometrics*. Oxford: Oxford University Press. pp. 39–40.