経済変動の分析

戦後日本の経済変動の観察を通じて，GDP の変動には，トレンドを中心とした波動があることが分かった．その波動の振幅は，時間の経過を通じて拡大する様子もなく，縮小する様子もない．このような波動を定常波，あるいは定常過程という．直接に観察できる経済時系列の変動は，たとえば GDP の変動が示すように，この意味での定常波ではないものもある．しかしそれをさまざまに加工して定常波をつくることができる．現代マクロ経済学は，こうした工夫によって，経済時系列の特徴を記述し，経済構造を推測して，それを予測と政策立案に役立てようとしている．

1　伝統的な方法

1.1　トレンドの除去

最も分かり易いのは，トレンドの形を例えば時間の線形関数，２次関数など，観察値に適合するように特定する方法である．たとえば GDP の観察値を Y，時間を t として公式を例示すると

$$Y_t = a + bt + u_t$$

$$Y_t = a + bt + ct^2 + u_t$$

のようになる．このようにして得られたトレンドからの乖離，u_t の動きは定常波になる．とくに GDP など，マクロ経済学が扱う経済変数には，それを対数化すると時間の線形関数がよく当てはまる．数式で示せばつぎのようになる．

$$\log Y_t = a + bt + u_t$$

見方を変えると，これは Y が t の指数関数であるということである．

$$Y = e^{a+bt+u_t} = AU_te^{bt}, \quad A = e^a, \quad U_t = e^{u_t}$$

ここからすぐ分かるように，t の係数 b は Y の成長率を表す．実際，u_t を除いたトレンドの部分について，$(dY/dt)/Y = b$ である．

1.2　オークンの方法

オークンは，1950 年代から 1960 年代にかけてのアメリカ合衆国の経済について，GNP ギャップと失業率の関係を計測してつぎの結果を得た．

$$\gamma = 3.2(u - 0.04), \quad \gamma = \frac{\bar{Y} - Y}{Y}$$

ここで Y は現実の GNP，$\bar{Y}$ は潜在 GNP，u は小数で表した失業率である．これは，完全雇用失業率が 4 パーセントであることを前提としている．このように，失業率が完全雇用失業率を超えると GNP ギャップが発生し，その大きさは失業率に比例して増えるという関係をオークンの法則という．

この比例関係の比例定数を定める根拠として，オークンは３つの計測結果を示す．

1. GNP の時間変化率と失業率の時間変化率の関係

$$\Delta u_t = 0.30 - 0.30 g_t, \quad \Delta u_t = u_t - u_{t-1}, \quad g_t = 100 \times \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$$

すなわち，百分率（パーセント）で表した失業率は，もし GNP が成長しなければ（$g_t = 0$） 0.3 だけ増加し，GNP が 1 パーセント成長すれば 0.3 だけ減少する．GNP が成長しないときの失業率の増加は労働生産性および労働力の成長によるものと説明される．

2. 暫定 GNP ギャップと失業率の関係

$$u_t = 3.72 + 0.36\hat{\gamma}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\hat{Y}_t - Y_t}{\hat{Y}_t}$$

$\hat{Y}$ は潜在 GNP の暫定推定値である．潜在 GNP が実現したと思われる年次を基準とし，成長率を一定としてその他の年の潜在 GNP を推定する．推定値を選択する基準は（1）統計的適合度がたかいこと（2）結果として得られる残余が定常波となること（3）完全雇用失業率が 4 パーセントとなることである．

3. 生産量に関する雇用弾力性

雇用量を N_t，生産量を Y_t とするとき

$$\frac{N_t}{\bar{N}} = \left(\frac{Y_t}{\bar{Y}_t}\right)^a, \quad \bar{Y}_t = \bar{Y}_0 e^{rt}$$

で表される関係があるとしよう．ここで $\bar{N}$ は労働力，$\bar{Y}_t$ は潜在 GNP，r はその成長率である．このような関係は，たとえばコブ＝ダグラス型の集計的生産関数の前提から導かれる．実際，コブ＝ダグラス型の集計的生産関数を前提とし，潜在 GNP とは，各期ごとに資本ストックを所与として労働量を完全に雇用したときの生産量であるとすると

$$Y_t = K_t^{\alpha} N^{1-\alpha}, \quad \bar{Y}_t = K_t^{\alpha} \bar{N}^{1-\alpha}, \quad \text{したがって} \quad \frac{Y_t}{\bar{Y}_t} = \left(\frac{N_t}{\bar{N}}\right)^{1-\alpha}$$

である．そこで $a = 1/(1-\alpha)$ とすればよい．この関係の対数をとると，つぎの関係が得られる．

$$\log N_t = \log \frac{\bar{N}}{\bar{Y}_0^a} + a \log Y_t + (ar)t$$

そこで　$\log N_t = c_0 + c_1 \log Y_t + c_2 t$　のように $\log N_t$ を $\log Y_t$ と t に回帰して係数 c_0，c_1，c_2 を推定すると

$$c_0 = \log \frac{\bar{N}}{\bar{Y}_0^a}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = ar$$

であることから

$$\bar{Y}_0 = \left(\frac{\bar{N}}{e^{c_0}}\right)^{1/a}, \quad a = c_1, \quad r = \frac{c_2}{c_1}$$

のように基準年の潜在 GNP，$\bar{Y}_0$，その成長率，r，雇用弾力性，r が推定できる．

労働力 $\bar{N}$ は直接に観察できる．オークンは，これが時間を通じて一定であるとしているが，労働力が増加する場合にも，この方法は容易に応用できる．いま，労働力の増加率を n とすると

$$\bar{N}_t = \bar{N}_0 e^{nt}$$

である．したがって潜在 GNP 等を計測するための式はつぎのようになる．

$$\log N_t = \log \frac{\bar{N}_0}{\bar{Y}_0^a} + a \log Y_t + (n + ar)t$$

ここから

$$\bar{Y}_0 = \left(\frac{\bar{N}_0}{e^{c_0}} \right)^{1/a}, \quad a = c_1, \quad r = \frac{c_2 - n}{c_1}$$

この計測のためには，基準年の労働力の大きさと労働力の増加率の観察が必要ということになる．

雇用弾力性は，GNP の変化率に対する雇用量の変化率の割合

$$\frac{\Delta N}{N} = a \frac{\Delta Y}{Y}$$

であるから，オークンの法則の比例定数の大きさを決定するための一つの手掛かりとなる．オークンは，a の計測値が 0.34 と 0.40 のあいだであったと報告している．

オークンの方法を用ると，潜在 GNP と現実の GNP の差として定常波を検出することができる．この方法で計測した潜在 GNP は，それ自体として波動をもっている．しかしオークンの見方では，潜在 GNP と現実の GNP の差が景気循環に対応する定常波である．

2　景気変動の時系列分析

このようにして得られた定常波をどのように記述すれば，予測や政策立案に役立つような分析がし易くなるであろうか．波動を白色雑音によって表すことが，一つの工夫である．

経済の確率モデル　時系列分析の方法を援用する現代マクロ経済学は，経済とその動きを見るのに，多期間の確率モデルを用いる．いま，経済が 1 変数の時系列

$$y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$$

で記述できるとすると，確率モデルは，これらの変数の確率分布関数で表される．$(y_t, y_{t-1}, \ldots)$ をまとめて Y_t，$\{y_t\}$ などと書く．分析の対象となる歴史が y_1 までであるとき，0 時点以前の歴史 $(y_0, y_{-1}, y_{-2}, \ldots)$ をまとめて Y_0 で表し，

$$Y_t = (y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1, Y_0)$$

のように書くことがある．このように記号を定めると，経済の確率モデルは，確率分布関数を用いて，一般に

$$F(Y_t) \quad \text{あるいは} \quad F(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1 | Y_0)$$

のように書かれる．ここで $F(\cdot|Y_0)$ は，0 時点までの歴史 Y_0 がすでに分かったものとして定まる確率分布関数である．実際に観察される歴史は，このような確率分布にしたがう確率変数の列，すなわち確率過程 $(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1, Y_0)$ の一つの実現値とみなすことができる．経済の構造を知るということは，このような確率分布関数 F の特性を知るということである．

定常波　ここで定常波あるいは定常過程 stationary process の定義を確認しておこう．経済学では，普通，第２次定常性といわれるつぎの性質を持つ系列 $\{y_t\}$ を定常波という．

$$\text{第２次定常：}\quad \mathrm{E}[y_t]=\mu,\quad \mathrm{E}[(y_t-\mu)^2]=\sigma^2,\quad \mathrm{E}[(y_t-\mu)(y_{t-k}-\mu)]=\gamma_k$$

これは，大まかにいえば，一定水準のまわりを，時間を通じて同じように振動する波である．$\{y_t\}$ が定常波であるとき，$x_t=y_t-\mathrm{E}[y_t]$ として系列 $\{x_t\}$ をつくると，これは波動の中心がゼロの定常波になる．中心がゼロである波動の方が取り扱いが簡単であるので，普通は，$\{y_t\}$ をこのように $\{x_t\}$ に加工して分析を進める．

定常性は，厳密には，確率分布が時間の経過に対して不変であるという性質である．いま確率分布関数を F とするとき，この性質はつぎのように書かれる．

$$\text{厳密定常：}\quad F(y_{t_1},y_{t_2},\ldots,y_{t_n})=F(y_{t_1+h},y_{t_2+h},\ldots,y_{t_n+h})$$

第２次定常の概念は，確立分布を，第２次までの積率を用いて識別しているということになる．

自己相関と白色雑音　時系列 $(y_t,y_{t-1},y_{t-2},\ldots,Y_0)$ について，$\mathrm{cov}(y_t,y_{t'})\neq 0$ であるとき，その系列は自己相関 auto-correlation あるいは系列相関 serial correlation をもつという．平均がゼロ，分散が有限で自己相関をもたない系列を白色雑音 white noise という．記号で示せば，

$$\mathrm{E}(\epsilon_t)=0,\quad \mathrm{E}(\epsilon_t^2)<\infty,\quad r(\epsilon_t,\epsilon_{t'})=0$$

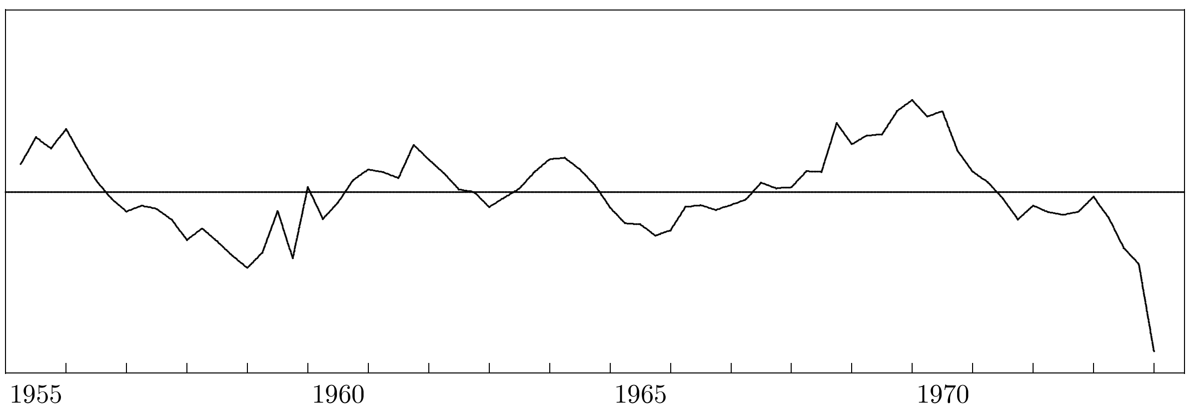
という条件を満たす $\{\epsilon_t\}$ である．これが，白色雑音の最も基本的な性質である．分析によっては，これに一様分散の条件

$$\mathrm{E}(\epsilon_t^2)=\sigma^2$$

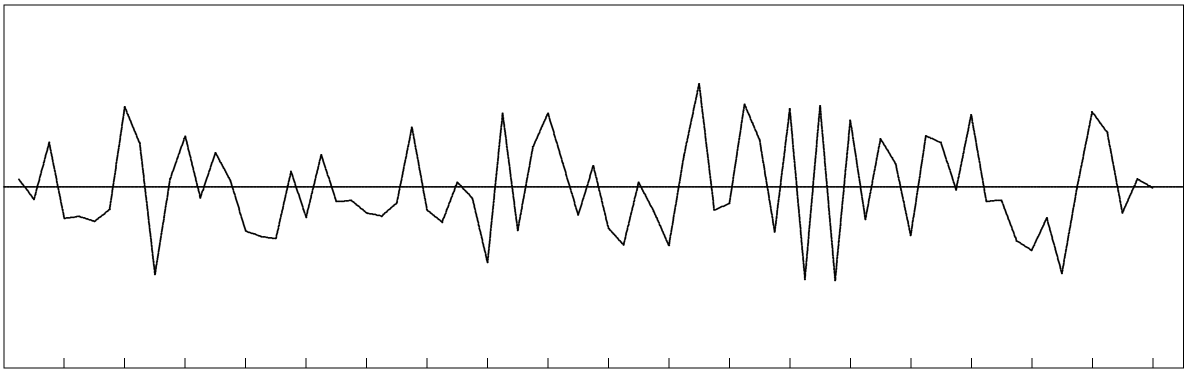
さらに分布の独立性と正規性の条件を加えることがある．

経済時系列　経済時系列のほとんどに自己相関がある．そのことは，たとえば GDP の変動からトレンドを除いた残余の変動を，白色雑音の動きと比較すれば容易に分かる．

GDP の波動



白色雑音



１階の系列相関 $\mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) \neq 0$ を検定する統計量としてダービン＝ワトソン比 Durbin-Watson statistic

$$DW = \frac{\sum_2^n (y_t - y_{t-1})^2}{\sum_1^n y_t^2}$$

がある．高成長期のトレンドについて，DW 比は 0.277486 であった．これは，トレンドを除いた残差について，正の１階の自己相関があることを示唆している．

自己回帰過程と移動平均過程　$\{\epsilon_t\}$ を白色雑音とするとき，

$$y_t = ay_{t-1} + \epsilon_t$$

にしたがう系列 $\{y_t\}$ を１階の自己回帰過程 auto-regressive process，AR(1) という．そして一般に

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

にしたがう系列を p 階の自己回帰過程，AR(p) という．一方

$$y_t = \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + b_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + b_q \epsilon_{t-q}$$

にしたがう系列を q 階の移動平均過程 moving average process，MA(q) という．MA 過程が自己相関をもつことは明らかであろう．さらに，AR と MA の両方の要素を持つ過程

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + b_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + b_q \epsilon_{t-q}$$

を階数 p，q の自己回帰移動平均過程 auto-regressive moving average process，ARMA(p, q) という．一般に定常波は ARMA の形で書き表されることが知られている．これはヘルマン・ウォルトによるものであり，**ウォルトの表現定理 representation theorem** または**分解定理 decomposition theorem** という．そのため，AR，MA，ARMA などの概念は，経済変動の理論分析，計量分析の基礎であり，現代マクロ経済学を理解するために不可欠である．

フリッシュの理論　ラグナー・フリッシュは，ケインズの『一般理論』出版の３年前，1933 年に重要な論文 “Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics” を発表し，経済変動の分析にとって極めて有力な見方を示した．それは，経済にさまざまな外生撹乱要因がランダムに作用すると，消費，生産量，在庫などさまざまな経済変数に，その経済固有の周期をもつ波動が生じるという見方である．木馬にランダムな衝撃を加えると木馬はそれに固有の周期で揺れるのに似ていることから，この理論を「木馬理論 rocking-horse theory」と呼ぶことがある．経済の場合は，外生撹乱要因として，例えば気象条件の変化，技術進歩，戦争などが考えられる．

この見方は，経済変動を AR 過程や ARMA 過程に当てはめて分析する時系列分析の方法とよく対応する．外生撹乱要因 impulse を表すのが白色雑音であり，経済変数の周期運動を定める伝播機構 propagation mechanism を表すのが AR あるいは ARMA の係数である．

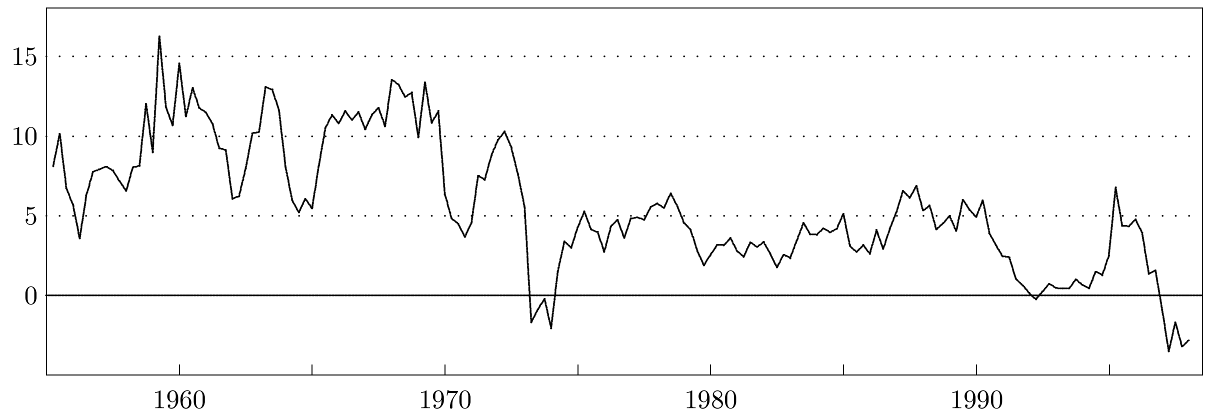
3　確率的トレンドの概念

3.1　ネルソン＝プロッサー

経済時系列の波動を調べるために，時間変化率の変動を見る方法がある．このように，時間とともに増大する時系列の波動を調べるためにその増加率の変動を見るという方法は，決して新しい方法ではないが，この考え方をマクロ経済分析に取り入れ，その含みを明らかにしたのはネルソンとプロッサーの 1982 年の論文である．

GDP の変動を例にとって考えよう．日本の GDP について，その成長率の変動を見ると図のようになる．これは 1955 年から 1998 年の四半期データを用いて，前年同期比の変動を描いたものである．

実質 GDP の成長率（%）



成長率の変動は高成長期，低成長期，停滞期のそれぞれで，ほぼ定常波であるように見える．GDP の対前年比の動きを見るということは，GDP の対数の差分の動きを見るのと同じことである．実際，GDP を Y として $y_t = \log Y_t$ とすると

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \log \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$$

したがって Y_t/Y_{t-1} あるいは $(Y_t - Y_{t-1})/Y_{t-1}$ が定常波であるとき $\{\Delta y_t\}$ は定常波となる．

そこで，トレンドをもつ経済時系列についての２つの見方を比較しよう．一つは第１節のように，トレンドを，たとえば $a + bt$ のように予め定められた t の関数とし，$\{y_t\}$ からそのトレン

ドを除いた残りが定常波であるという見方である．つまり，y_t を

$$\text{(TS)} \qquad y_t = a + bt + u_t$$

のように分解したとき，$\{u_t\}$ が定常波であるという見方である．$\{y_t\}$ がそのような系列であるとき，$\{y_t\}$ は趨勢定常 trend stationary であるという．もう一つは，y_t の差分が定常波であるという見方である．つまり

$$\text{(DS)} \qquad y_t - y_{t-1} = b + u_t$$

とするとき，$\{u_t\}$ が定常波であるという見方である．一般に，差分が定常波である系列 $\{y_t\}$ は差分定常 difference stationary であるという．

トレンドをもつ経済時系列を趨勢定常と見るか差分定常見るかの違いは，経済時系列そのものの変動に関して，著しく異なる含みをもつ．実際，(DS) の式を書きなおすとつぎのようになる．

$$y_t = y_0 + bt + \sum_{i=0}^{t-1} u_{t-i}$$

これを (TS) の式と比較すると，(TS) ではトレンド線 $a + bt$ からの乖離部分が定常波であるのに対して，(DS) ではトレンド線 $y_0 + bt$ からの乖離部分が定常波の累積になっていて，その分散は時間が経つにしたがって際限なく大きくなって行く．つまり $\{y_t\}$ の変動は，(TS) ならばトレンド線につねに戻る動きであるのに対して，(DS) ならば，必ずしもトレンド線に戻らない．

この相違を，インパルスあるいはショックに対する体系の反応あるいは応答 response の面から見てみよう．簡単に計算ができるように，$\{u_t\}$ は AR(1)

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \epsilon_t, \quad 0 < \alpha < 1$$

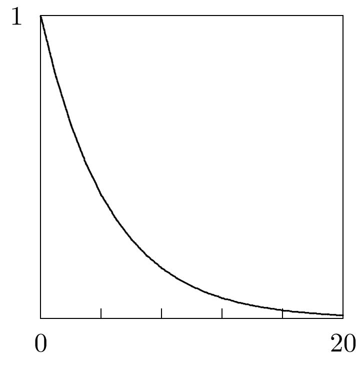
である場合を考える．そのとき u_t は過去の外生ショックの加重和として

$$u_t = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1} + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \cdots + \alpha^{t-1}\epsilon_1$$

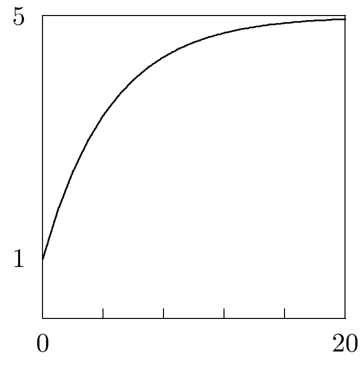
のように表される．ϵ_{t-i} の係数は，i 期前のショックが u_t に与える影響の大きさを表す．これを，インパルス ϵ_{t-i} に対する u_t の応答 response という．$\{u_t\}$ が AR(1) であるとき，ϵ_{t-i} に対する u_t の応答は α^i になる．とくに期間 1 のインパルス ϵ_1 に対する u_t の応答は α^{t-1} である．$\lim_{t\to\infty} \alpha^t = 0$ であることから，期間 1 のインパルス ϵ_1 の影響は時間の経過とともに次第に小さくなって行くことが分かる．

$\{y_t\}$ が (TS) であるときは，トレンドからの乖離部分の動きが $\{u_t\}$ のような定常波であることから，$\{y_t\}$ をトレンドから外らせようとする外生ショックの影響が時間の経過とともの次第に小さくなって行くことが分かる．

トレンドからの乖離の応答 (TS)



トレンドからの乖離の応答 (DS)



$\{y_t\}$ が (DS) であるときは，トレンドからの乖離部分は u_t の累積 $\sum_{i=0}^{t-1} u_{t-i}$ になる．$\{u_t\}$ が AR(1) である場合について $\{y_t\}$ の変動を $\{\epsilon_t\}$ を用いて表すと AR の形で

$$y_t = (1-a)b + (1+a)y_{t-1} - a + \epsilon_t$$

あるいは MA の形で

$$y_t - (y_0 + bt) = \epsilon_t + \left(\sum_{k=0}^{1} \alpha^k\right)\epsilon_{t-1} + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{t-i} \alpha^k\right)\epsilon_i + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k\right)\epsilon_1$$

のようになる．したがってトレンドからの乖離 $y_t - (y_0 + bt)$ の期間 1 のインパルス ϵ_1 に対する応答は

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{t-1} = \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}$$

そして

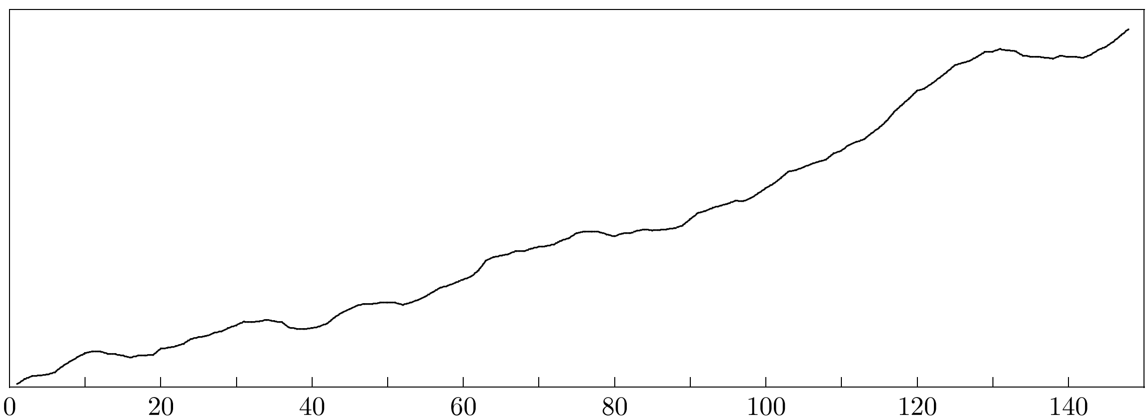
$$\lim_{t=\infty} \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

であることから，その影響はゼロに収束しないことが分かる．いま考えている (DS) の例

$$y_t - y_{t-1} = u_t, \quad u_t = au_{t-1} + \epsilon_t$$

で，$a = 0.6$，$b = 3$ として $\{y_t\}$ の変動を描くと下図のようになる．

y_t の変動 (DS)



経済の体系外から経済に加わるショックのうち，経済変数の応答が時間の経過とともにゼロに収束し影響が消滅して行くものを一時的ショック transitory shock，応答がゼロに収束せず，影響が永続して残存するものを永続的ショック pemanent shock という．トレンドをもつ経済時系列を (TS) と見ると外生ショックは一時的であることになり，(DS) と見ると永続的であることになる．ネルソン＝プロッサーは，アメリカ合衆国の 1860 年から 1970 年にわたるデータを用いて，GNP の変動が (DS) であるという仮説を棄却できないという結果を報告している．

3.2　ブランチャード＝クワの修正

ブランチャード＝クワは，GNP と失業率の 2 変数と 2 つの外生ショックのある確率モデルをつくり，1950 年から 1987 年にわたるアメリカ合衆国の経済変動を分析した．その結果は *Lectures*,

第１章に要約されている．このモデルでは，１つの外生ショックは GNP と失業率の両方に一時的影響を与え，もう１つの外生ショックは GNP に永続的影響，失業率に一時的影響を与える．ブランチャード＝クワは前者を需要ショック，後者を供給ショックと呼ぶ．この研究では，オークンに従い，失業率はもっぱら一時的な要因で変動することを前提としている．

参考文献

Lectures, Chapter 1.

Arthur M. Okun (1962) "Potential GNP: Its Measurement and Significance." *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association.* 98–103. Reprinted in *Economics for Policymaking : Selected Essays of Arthur M. Okun*, edited by Joseph A. Pechman. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Charles Nelson and Charles Plosser (1982) "'Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series." *Journal of Monetary Economics* 10: 139–162.

Olivier J. Blanchard and Danny Quah (1989) "The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Shocks." *American Economic Review* 79: 635–673.

Ragnar Frisch (1933) "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics." In *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel.* London: Allen and Unwin.

Herman O. A. Wold (1938) *A Study in the Analysis of Stationary Time Series.* Stockholm: Almqvist and Wicksell.